Der Greenring einer endlichen Gruppe mit einer zyklischen Sylowuntergruppe

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der
Fakultät für Mathematik und Informatik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Math. Lothar Häberle
geboren am 18. März 1970 in Pforzheim

Gutachter

Prof. Dr. Burkhard Külshammer, Jena

Prof. Dr. Robert Boltje, Santa Cruz, Kalifornien

Tag der letzten Prüfung des Rigorosums: 7. Dezember 2005

Tag der öffentlichen Verteidigung: 16. Dezember 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Darstellungstheorie behandelt Fragestellungen aus der Gruppentheorie mit Hilfe von Methoden und Kenntnissen aus anderen Teilgebieten der Algebra. So wird aus einer endlichen Gruppe G und einem Körper F eine Gruppenalgebra FG konstruiert. Um Kenntnisse über G zu gewinnen, kann man statt G auch FG untersuchen. Neben der inneren Struktur von FG sind vor allem die FG-Moduln von Interesse. Man bildet direkte Summen von Moduln, zerlegt die Moduln in unzerlegbare Summanden oder bildet das Tensorprodukt zweier Moduln. Die Bestimmung der unzerlegbaren Summanden eines Tensorprodukts bereitet im allgemeinen große Schwierigkeiten. Eine Möglichkeit mit diesen Schwierigkeiten umzugehen, besteht darin, die Isomorphieklassen von FG-Moduln als Elemente eines kommutativen Rings anzusehen. Dabei bilden die Isomorphieklassen der unzerlegbaren FG-Moduln eine $\mathbb{Z}$-Basis des Rings. Die Addition ist durch die direkte Summe, die Multiplikation durch das Tensorprodukt gegeben. Diese Idee geht auf J. Green zurück. Der eben beschriebene Ring wird Darstellungsring oder Greenring von FG genannt und mit $a(FG)$ bezeichnet. Der $\mathbb{Z}$-Rang von $a(FG)$, also die Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer FG-Moduln, ist genau dann endlich, wenn $\operatorname{char} F = 0$ ist oder wenn $\operatorname{char} F = p > 0$ ist und G eine zyklische p-Sylowgruppe besitzt (siehe [Hig]). Der erste Fall kann als Spezialfall des zweiten gesehen werden, wenn für p eine Primzahl gewählt wird, die die Gruppenordnung nicht teilt.

Ist F algebraisch abgeschlossen und $\operatorname{char} F = 0$, entspricht $a(FG)$ dem Charakterring $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(G)$, welcher von den irreduziblen Charakteren von G erzeugt wird. Für $\operatorname{char} F = p$ ist der Grothendiek-Ring der Kategorie der FG-Moduln ein Beispiel eines Faktorrings von $a(FG)$ mit endlicher $\mathbb{Z}$-Basis. Ebenfalls von endlichem $\mathbb{Z}$-Rang ist der von den FG-Moduln mit trivialer Quelle erzeugte Teilring $a(FG, \mathrm{Triv})$ von $a(FG)$. Diese Ringe wurden gründlich untersucht ([Ben], Chap. 5; [Dei]; [Bol]).

Mit dem Greenring $a(kG)$ für einen Körper k mit $\operatorname{char} k = p$ und eine Gruppe G mit zyklischer p-Sylowgruppe beschäftigt sich diese Arbeit. Um das Studium von $a(kG)$ zu erleichtern, wird der Koeffizientenring $\mathbb{Z}$ zu einem größeren Ring S erweitert. Mit $A_S(kG)$ wird die S-Algebra $S \otimes_{\mathbb{Z}} a(kG)$ bezeichnet, wobei für $S = \mathbb{C}$ kurz $A(kG)$ geschrieben wird. Da G eine zyklische p-Sylowgruppe besitzt, ist $A(kG)$ halbeinfach ([Gr62], [Rei]), d.h. $A(kG)$ zerfällt in eine direkte Summe einfacher $A(kG)$-

Moduln, welche jeweils von einem primitiven Idempotent von $A(kG)$ erzeugt werden. Nach dem Satz von Wedderburn ist die kommutative $\mathbb{C}$-Algebra $A(kG)$ isomorph zu $\mathbb{C}^n$ für eine natürliche Zahl n . Ein solcher Isomorphismus bildet die primitiven Idempotente von $A(kG)$ auf die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{C}^n$ ab. Kennt man also diesen Isomorphismus, so bekommt man durch die Umkehrabbildung die Idempotente von $A(kG)$. Der Isomorphismus setzt sich aus sogenannten Spezies zusammen. Spezies sind Homomorphismen des Greenrings in die komplexen Zahlen. Sie sind das Analogon zu den Charakteren von endlichen Gruppen. So wie die Konjugationsklassen einer endlichen Gruppe durch die Charaktere eindeutig bestimmt sind, so sind die Isomorphieklassen von kG-Moduln durch die Spezies eindeutig bestimmt.

Mit den Spezies werden nicht nur die Idempotente von $A(kG)$ bestimmt, sie dienen auch zur Berechnung der Idempotente und Primideale von $a(kG)$. Dazu wird der Koeffizientenring $\mathbb{C}$ auf einen hinreichend großen algebraischen Zahlkörper L eingeschränkt. Aus den Primidealen des Ganzheitsrings $\mathcal{O}_L$ von L und den Spezies von $A(kG)$ werden die Primideale von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ konstruiert. Auf dem Spektrum von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$, also der Menge der Primideale von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$, wird die Zariski-Topolgie definiert. Durch die Zusammenhangskomponenten dieser Topologie erhält man die primitiven Idempotente von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$, von denen sich die Idempotente von $a(kG)$ ableiten lassen. Indem man $a(kG)$ als Teilring von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ betrachtet und die Primideale von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ mit $a(kG)$ schneidet, erhält man die Primideale von $a(kG)$. Mit dieser Methode können auch die Primspektren der oben erwähnten Teil- bzw. Faktorringe des Greenrings einer beliebigen endlichen Gruppe bestimmt werden (siehe [Dei]).

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden die für die nachfolgenden Kapitel relevanten Grundlagen der Darstellungstheorie und kommutativen Algebra bereitgestellt. Dort werden auch die oben beschriebenen Zusammenhänge ausführlicher dargestellt.

Die Unterkapitel 2.1 und 2.2 beginnen mit Klassifikationen der unzerlegbaren kP- und kG-Moduln, wobei P eine p-Sylowgruppe von G ist. Die Klassifikation der kG-Moduln basiert auf der Greenkorrespondenz, welche für jede Untergruppe D von P die Isomorphieklassen der kG-Moduln mit Vertex D auf die Isomorphieklassen der $kN_G(D)$-Moduln mit Vertex D bijektiv abbildet. Über diese Klassifikationen hinaus werden die für das Rechnen im Greenring notwendigen Eigenschaften der Moduln bewiesen: Es werden einige Tensorprodukte von kP-Moduln berechnet und die Gruppenstruktur von $N_G(D)$ für $D \leq P$ untersucht. Es stellt sich heraus, daß die kG-Moduln sich auf eine für diese Arbeit entscheidende Weise durch kP-Moduln sowie kG-Moduln mit trivialer Quelle und die Faktorgruppe $N_G(P)/C_G(P)$ beschreiben lassen (Korollar 2.24).

Im dritten Kapitel werden mit Hilfe der Ergebnisse des zweiten Kapitels die Spezies und Idempotente von $A(kG)$ konstruiert. Die oben erwähnte Beschreibung der kG-Moduln wird durch die Spezies präzisiert: Die Spezies von $A(kG)$ setzen sich aus den Spezies von $A(kP)$, den Spezies des Teilrings $A(kG, \mathrm{Triv})$ und den Charakteren von $N_G(P)/C_G(P)$ zusammen (Satz 3.31 und Satz 3.35). Dieses Ergebnis aus Unterkapitel 3.4 wird in den vorhergehenden Unterkapiteln vorbereitet. Der Fall, daß die p-Sylowgruppe Primzahlordnung hat, wurde auch in [HK] behandelt.

Kapitel 3.2 widmet sich den Spezies und Idempotenten von $A(kG, \mathrm{Triv})$. Für eine beliebige endliche Gruppe H ist eine Methode zur Bestimmung der Spezies von $A(kH, \mathrm{Triv})$ bekannt ([CR], Kap. 81B). Dabei werden die kH-Moduln mit trivialer Quelle auf p-hypoelementare Untergruppen von H eingeschränkt. In dem hier vorliegenden Spezialfall ist es günstiger, die kG-Moduln auf die Untergruppen $N_G(D)$, wobei D die Untergruppen von P durchläuft, einzuschränken. Auf eine natürliche Weise folgt dann eine Formel für die Idempotente (Satz 3.12).

Im Kapitel 3.3 werden die Spezies und Idempotente von $A(kP)$ bestimmt. Die Spezies wurden schon von J. Green in [Gr62] angegeben. Seine Resultate basieren auf der Berechnung zahlreicher Tensorprodukte von kP-Moduln. Dagegen steht in dieser Arbeit die Ringstruktur von $A(kP)$ bei der Bestimmung der Spezies im Vordergrund.

Die Resultate des dritten Kapitels werden im vierten Kapitel angewendet. Im Kapitel 4.1 werden die Primideale von $a(kP)$ klassifiziert (Satz 4.8). Im Kapitel 4.2 werden zunächst die Primideale von $a(kG, \mathrm{Triv})$ untersucht. Schließlich werden die Primideale von $a(kG)$ mit Hilfe der Primideale von $a(kP)$ und $a(kG, \mathrm{Triv})$ beschrieben (Satz 4.19 und Satz 4.23). Außerdem wird gezeigt, daß $a(kG)$ außer 0 und 1 keine Idempotente besitzt (Korollar 4.22).

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Professor B. Külshammer für die Anregung, sich mit diesem interessanten Thema zu beschäftigen, und seine Unterstützung herzlich bedanken.

Kapitel 1

Grundlagen

Im gesamten Dokument sei G eine endliche Gruppe und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zunächst wird von G keine weitere Eigenschaft verlangt. Später soll G eine zyklische p-Sylowgruppe besitzen. In diesem Kapitel sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und F ein Körper.

Im ersten Unterkapitel werden die für diese Arbeit notwendigen Grundlagen der modularen Darstellungstheorie zusammengestellt. Sie können in einführenden Lehrbüchern wie [CR], [NT] oder [Alp] nachgelesen werden. Im zweiten Unterkapitel wird der Greenring eingeführt. Eine ausführliche Darstellung befindet sich in [CR], [Ben] und [BP].

1.1 Die Gruppenalgebra RG

Für Untergruppen H und U von G schreibt man $H \leq U$, falls H eine Untergruppe von U ist. Die Schreibweise $H < U$ bedeutet, daß $H \leq U$ und $H \neq U$ gilt. Für $g, h \in G$ und $H \leq G$ ist ${}^g h := ghg^{-1}$ und ${}^g H := gHg^{-1}$. Man schreibt $H \leq_G U$, falls es ein $g \in G$ gibt mit ${}^g H \leq U$. Analog sind $\geq_G$ und $=_G$ definiert. Es sei q eine Primzahl. Ein Element $g \in G$ heißt *q-Element*, falls seine Ordnung eine Potenz von q ist. Es heißt *q'-Element*, falls seine Ordnung teilerfremd zu q ist. Die Menge aller q-Elemente wird mit G_q bezeichnet, die Menge aller q'-Elemente mit $G_{q'}$. Zu jedem Element $h \in G$ existieren eindeutig bestimmte Elemente $h_q \in G_q$ und $h_{q'} \in G_{q'}$ mit $h = h_q\, h_{q'} = h_{q'}\, h_q$.

Mit RG wird die Menge aller Abbildungen $\varphi : G \to R$ bezeichnet. Dann ist RG ein R-Linksmodul mit $(\varphi + \psi)(g) := \varphi(g) + \psi(g)$ und $(r\varphi)(g) := r\varphi(g)$, wobei $\varphi, \psi \in RG$, $r \in R$ und $g \in G$ ist. Da $\{\hat{g} \in RG \mid g \in G, \hat{g}(h) := \delta_{gh}, h \in G\}$ eine R-Basis von RG ist, ist RG ein freier R-Modul vom Rang $|G|$. Auf RG ist eine

Multiplikation definiert:

$$\Big(\sum_{g\in G} r_g\hat{g}\Big)\cdot\Big(\sum_{h\in G} s_h\hat{h}\Big) := \sum_{g,h\in G} r_g s_h\hat{gh}$$

mit $r_g\,, s_h \in R$. Auf diese Weise wird RG eine R-Algebra. Die Abbildung $g \longmapsto \hat{g}$ bettet G in RG ein. So kann G als Teilmenge von RG aufgefaßt werden. Man schreibt dann g statt $\hat{g}$. Die F-Algebra FG ist ein endlichdimensionaler F-Vektorraum. Deshalb ist FG ein artinscher Ring.

Unter einem *RG-Modul* wird stets ein endlich erzeugter und als R-Modul freier RG-Linksmodul verstanden. Da G eine endliche Gruppe ist, ist ein RG-Modul auch ein endlich erzeugter R-Modul. Da R kommutativ ist, besitzt ein RG-Modul eine endliche R-Basis und je zwei Basen haben die gleiche Anzahl von Elementen. Für einen RG-Modul M wird diese Anzahl mit $\dim_R M$ bezeichnet. Sind M und N zwei RG-Moduln, dann sind $M\otimes_R N$ und $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ auch RG-Moduln. Die Skalarmultiplikation ist gegeben durch

$$\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big)\cdot m\otimes n := \sum_{g\in G} r_g gm\otimes gn$$

bzw. durch

$$\Big(\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big)\cdot f\Big)(m) := \sum_{g\in G} r_g({}^g f)(m) := \sum_{g\in G} r_g g f(g^{-1}m)\,.$$

Dabei sind $r_g \in R$, $m\in M$, $n\in N$ und $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Eine R-Basis von $M\otimes_R N$ erhält man, wenn man die Basisvektoren von M und N tensoriert. Also ist $M\otimes_R N$ ein freier R-Modul vom Rang $\dim_R M\cdot\dim_R N$. Der Ring R wird zu einem RG-Modul, indem man $g\cdot r := r$ für alle $g\in G$ und $r\in R$ setzt. Man spricht dann vom *trivialen* RG-Modul R. Der RG-Modul $M^* := \mathrm{Hom}_R(M,R)$ ist der *duale Modul* von M.

Es sei H eine Untergruppe von G. Ein RG-Modul M wird zu einem RH-Modul, indem die Skalarmultiplikation auf RH eingeschränkt wird. Der durch diese *Restriktion* gewonnene Modul wird mit $\mathrm{res}_H^G M$ bezeichnet. Ein RH-Modul N wird durch *Induktion* zu einem RG-Modul: $\mathrm{ind}_H^G N := RG\otimes_{RH} N$ mit $g\cdot(m\otimes n) := gm\otimes n$ für $g\in G$, $m\in RG$ und $n\in N$. Es gilt $\dim_R \mathrm{ind}_H^G N = (G:H)\dim_R N$. Es sei $g\in G$. Ein RH-Modul N wird zu einem $R({}^gH)$-Modul durch $({}^gh)\cdot n := hn$, wobei $h\in H$ und $n\in N$ ist. Dieser Modul wird mit ${}^gN$ bezeichnet. Ist H ein Normalteiler in G und N ein $R(G/H)$-Modul, so bekommt man den RG-Modul $\mathrm{inf}_{G/H}^G N$ durch *Inflation.* Seine Skalarmultiplikation ist durch $g\cdot n := (gH)n$ für $g\in G$ und $n\in N$ gegeben.

Bemerkung 1.1. *Es seien U, H Untergruppen von G, desweiteren M, L zwei RG-Moduln, N ein RH-Modul und $\mathcal{V} \subset G$ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $U\backslash G/H$. Dann gilt:*

(i) $M \otimes_R \operatorname{ind}_H^G N \cong \operatorname{ind}_H^G(\operatorname{res}_H^G M \otimes_R N)$

(ii) $\operatorname{res}_U^G \operatorname{ind}_H^G N \cong \bigoplus_{g\in\mathcal{V}} \operatorname{ind}_{{}^gH\cap U}^U \operatorname{res}_{{}^gH\cap U}^{{}^gH}({}^gN)$

(iii) $\operatorname{Hom}_R(M, L) \cong \operatorname{Hom}_R(R, M^* \otimes_R L)$

(iv) $\operatorname{Hom}_{RG}(M, \operatorname{ind}_H^G N) \cong \operatorname{Hom}_{RH}(\operatorname{res}_H^G M, N)$ *als R-Moduln*

Teil (ii) ist die *Mackey-Formel* für Moduln ([CR], 10.13). Teil (iv) nennt man *Frobenius-Reziprozität* ([CR], 10.21). Eine *(gewöhnliche) Darstellung* von G über R ist der Gruppenhomomorphismus

$$\Delta : G \longrightarrow \operatorname{Aut}_R(M)\,, \quad g \longmapsto (m \longmapsto gm)\,,$$

wobei M ein RG-Modul ist. Durch lineare Fortsetzung erhält man eine *Darstellung* von RG:

$$\Delta : RG \longrightarrow \operatorname{End}_R(M)\,.$$

Die Einschränkung einer Darstellung von RG auf G ist eine Darstellung von G über R. Darstellungen von G über R und Darstellungen von RG entsprechen sich also. Startet man mit einem freien R-Modul M von endlichem Rang und einem beliebigen Gruppenhomomorphismus $\Delta : G \longrightarrow \operatorname{Aut}_R(M)$, so kann M durch $g \cdot m := (\Delta(g))(m)$ zu einem RG-Modul gemacht werden.

Zwei Darstellungen $\Delta_i : G \longrightarrow \operatorname{Aut}_R(M_i)$, $i \in \{1, 2\}$, heißen *ähnlich*, falls ein R-Isomorphismus $f : M_1 \longrightarrow M_2$ existiert mit $\Delta_2(g) = f \circ \Delta_1(g) \circ f^{-1}$ für alle $g \in G$. Gegebenenfalls ist f ein RG-Isomorphismus. Sind umgekehrt M_1 und M_2 isomorphe RG-Moduln, dann sind die zugehörigen Darstellungen ähnlich.

Bemerkung 1.2. *(i) Darstellung von G über R und RG-Moduln entsprechen sich.*

(ii) Ähnlichkeitsklassen von Darstellungen und Isomorphieklassen von Moduln entsprechen sich.

Es sei M ein FG-Modul und $\Delta : G \longrightarrow \operatorname{Aut}_F(M)$ eine Darstellung von G über F. Die Abbildung

$$\chi : G \longrightarrow F\,, \quad g \longmapsto \operatorname{spur} \Delta(g)$$

heißt *Charakter* von Δ. Da ähnliche Matrizen die gleiche Spur haben, haben ähnliche Darstellungen den gleichen Charakter. Charaktere sind Klassenfunktionen, d.h. sie sind konstant auf den Konjugationsklassen von G. Da Δ und somit auch χ nur von M abhängt, werden Charaktere oft mit dem zugehörigen Modul indiziert: χ_M.

Für FG-Moduln M und N gilt $\chi_{M\oplus N} = \chi_M + \chi_N$ und $\chi_{M\otimes_F N} = \chi_M \cdot \chi_N$, wobei $(\chi_M \cdot \chi_N)(g) = \chi_M(g) \cdot \chi_N(g)$ für $g \in G$ ist. Ist M ein einfacher FG-Modul, so nennt man χ_M *irreduzibel.*

Es sei nun $\operatorname{char} F = 0$ und F enthalte die $|G|$-ten Einheitswurzeln. Nach dem Satz von Maschke ist jeder FG-Modul halbeinfach. Nach dem Satz von Krull-Schmidt (siehe auch Bemerkung 1.5) ist die Zerlegung eines FG-Moduls in einfache direkte Summanden bis auf Isomorphie eindeutig.

Bemerkung 1.3. *(i) Zwei Darstellungen sind genau dann ähnlich, wenn sie den gleichen Charakter haben.*

(ii) Die Anzahl der irreduziblen Charaktere von G über F ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G.

(iii) Ist M ein FG-Modul, dann ist

$$\chi_M = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} a_\chi \chi ,$$

wobei mit $\operatorname{Irr}(G)$ *die Menge der irreduziblen Charaktere von G über F bezeichnet wird und $a_\chi \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit des zu χ gehörenden einfachen FG-Moduls in der Zerlegung von M in einfache Untermoduln ist. Insbesondere ist* $\chi_{FG} = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \chi(1)\chi$.

Aus den Bemerkungen 1.2 und 1.3 folgt, daß zwei FG-Moduln genau dann isomorph sind, wenn sie den gleichen Charakter haben. Insbesondere stimmt die Anzahl der einfachen Moduln mit der Anzahl der Konjugationsklassen überein. Mit $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(G)$ wird die Menge aller $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von irreduziblen Charakteren bezeichnet. Bemerkung 1.3 zeigt, daß jeder Charakter in der Menge $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(G)$ enthalten ist.

Bemerkung 1.4. *Die Menge $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(G)$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis* $\operatorname{Irr}(G)$*. Außerdem ist $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(G)$ ein Ring. Dabei ist die Multiplikation auf kanonische Weise definiert.*

Um modulare Darstellungstheorie betreiben zu können, benötigt man ein sogenanntes *p-modulares System.* Dies ist ein Tripel

$$(K, \mathcal{O}, k) ,$$

bestehend aus einem diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}$ mit Quotientenkörper K und Restklassenkörper $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ und $\operatorname{char} k = p$ ist. Ein p-modulares System erhält man folgendermaßen: Es sei K ein algebraischer Zahlkörper, also eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen

Zahlen von K und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_K$, welches p enthält. Auf K wird die $\mathfrak{p}$-*adische Bewertung* betrachtet:

$$|\,.\,|_{\mathfrak{p}} : K \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad \alpha \longmapsto N(\mathfrak{p})^{-\nu_{\mathfrak{p}}(\alpha)}\,.$$

Dabei ist N die Idealnorm und $\nu_{\mathfrak{p}}$ die Exponentialbewertung, welche für $\alpha \in K$ den Exponenten von $\mathfrak{p}$ in der Primidealzerlegung des gebrochenen Ideals (α) liefert. Dann ist

$$\mathcal{O} := \{\alpha \in K \mid |\alpha|_{\mathfrak{p}} \leq 1\}$$

der *Bewertungsring* und

$$\mathfrak{m} := \{\alpha \in K \mid |\alpha|_{\mathfrak{p}} < 1\}$$

das einzige maximale Ideal von $\mathcal{O}$. Siehe dazu [Neu], Kap.II.5. Für manche Zwecke ist es notwendig, daß K vollständig bzgl. seiner Bewertung ist. Ist dies nicht der Fall, geht man zur Vervollständigung $\hat{K}$ über. Sind $\hat{\mathcal{O}}$ und $\hat{\mathfrak{m}}$ der zugehörige Bewertungsring und das maximale Ideal, so ist $\hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{m}} \cong \mathcal{O}/\mathfrak{m}$. Ferner ist $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m} \cong \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Falls man modulo der entsprechenden maximalen Ideale rechnet, kann man also bedenkenlos die Vollständigkeit von K voraussetzen. Ein p-modulares System wird *passend* genannt, falls $\operatorname{char} K = 0$ ist und K die $|G|$-ten Einheitswurzeln enthält.

Bemerkung 1.5. *Es sei R ein Körper oder ein vollständiger, diskreter Bewertungsring. Dann läßt sich jeder RG-Modul bis auf Isomorphie auf eindeutige Weise als direkte Summe unzerlegbarer RG-Moduln schreiben.*

Diese Aussage ist als *Satz von Krull-Schmidt-Azumaya* bekannt ([CR], 6.12). Bei der nächsten Bemerkung handelt sich um einen Teil der *Clifford-Theorie* für Moduln ([CR], 11.1).

Bemerkung 1.6. *Es sei H eine normale Untergruppe von G, M ein einfacher RG-Modul und L ein einfacher Untermodul von $\operatorname{res}_H^G M$, $I := \{g \in G | {}^gL \cong L\} \leq G$ und $\mathcal{V}$ ein Vertretersystem von G/I. Dann ist*

$$\operatorname{res}_H^G M \cong \bigoplus_{i=1}^{e} \bigoplus_{g \in \mathcal{V}} {}^gL$$

für ein $e \in \mathbb{N}$.

Die Aussagen von Bemerkung 1.3 setzen die Charakteristik 0 des zugrunde liegenden Körpers voraus. Sie gelten im allgemeinen nicht, falls die Charakteristik gleich p ist. So haben der Nullmodul und die p-fache direkte Summe eines Moduls den gleichen Charakter.

Gegeben sei ein passendes p-modulares System $(K, \mathcal{O}, k)$. Es sei M ein kG-Modul und $\Delta_M : G \longrightarrow \operatorname{Aut}_k(M)$ die zugehörige Darstellung. Schreibe $|G| = p^d m$

mit $m \in \mathbb{N}$ und $p \nmid m$. Ist $g \in G_{p'}$, dann ist $\underline{\Delta}(g)$ diagonalisierbar und die Eigenwerte von $\Delta(g)$ sind m-te Einheitswurzeln $\overline{\zeta_1}, \ldots, \overline{\zeta_n} \in k$. Dabei ist $n = \dim_k M$, $\overline{\zeta_i} = \zeta_i + \mathfrak{m}$ mit eindeutig bestimmten m-ten Einheitswurzeln $\zeta_i \in \mathcal{O}$. Die Abbildung

$$\varphi_M : G_{p'} \longrightarrow \mathcal{O}\,, \quad g \longmapsto \zeta_1 + \cdots + \zeta_n$$

heißt *Brauercharakter* von M. Brauercharaktere sind Klassenfunktionen auf den p'-Konjugationsklassen von G. Wie für gewöhnliche Charaktere gilt $\varphi_{M \oplus N} = \varphi_M + \varphi_N$ und $\varphi_{M \otimes_k N} = \varphi_M \cdot \varphi_N$. Die Brauercharaktere der einfachen kG-Moduln heißen *irreduzibel.* Mit $\mathrm{IBr}(G)$ wird die Menge der irreduziblen Brauercharaktere von G bezeichnet. Analog zu $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(G)$ wird $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(G)$ definiert.

Wird $|G|$ von p geteilt, so ist kG nicht halbeinfach. Da kG ein artinscher Ring ist, besitzt jeder kG-Modul aber eine Kompositionsreihe. Nach dem Satz von Jordan-Hölder ist sie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bemerkung 1.7. *(i) Es sei M ein kG-Modul, χ_M der zugehörige gewöhnliche Charakter und φ_M sein Brauercharakter. Dann gilt $\chi_M(g) = \overline{\varphi_M(g)}$ für $g \in G_{p'}$.*

(ii) Die Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere ist gleich der Anzahl der p'-Konjugationsklassen von G.

(iii) Zwei einfache kG-Moduln sind genau dann isomorph, wenn sie den gleichen Brauercharakter besitzen.

(iv) Ist M ein kG-Modul, dann ist

$$\varphi_M = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} a_\varphi \varphi\,,$$

wobei a_φ die Vielfachheit des zu φ gehörenden einfachen kG-Moduls als Kompositionsfaktor von M ist.

(v) $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(G)$ *ist ein Ring sowie ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis* $\mathrm{IBr}(G)$.

Aus der Bemerkung folgt, daß zwei kG-Moduln genau dann den gleichen Brauercharakter besitzen, wenn sie die gleichen Kompositionsfaktoren mit den gleichen Vielfachheiten haben.

Da kG ein artinscher Ring ist, besitzt jeder einfache kG-Modul S eine projektive Decke P, also einen unzerlegbaren projektiven kG-Modul P, für den $P/J(P) \cong S$ gilt. Mit $J(M)$ wird das Jacobsonradikal eines Moduls M bezeichnet. Im Gegensatz zu beliebigen kG-Moduln ist ein projektiver kG-Modul durch seinen Brauercharakter bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Die einfachen kG-Moduln werden oft durch die zugehörenden irreduziblen Brauercharaktere parametrisiert: F_φ für $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$. Der triviale kG-Modul wird dann mit F_1 bezeichnet. Ist $\{F_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{IBr}(G)\}$ ein Vertretersystem der einfachen kG-Moduln, so ist

$$kG \cong \bigoplus_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} \bigoplus_{i=1}^{\varphi(1)} U_\varphi\,, \quad U_\varphi/J(U_\varphi) \cong F_\varphi$$

eine Zerlegung von kG in unzerlegbare direkte Summanden. Die Menge $\{U_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{IBr}(G)\}$ ist ein Vertretersystem der unzerlegbaren projektiven kG-Moduln. Der Brauercharakter eines projektiven Moduls heißt *projektiv*. Mit $\mathrm{IPr}(G)$ wird die Menge der unzerlegbaren projektiven Brauercharaktere von G bezeichnet.

Bemerkung 1.8. *Es sei* $\mathrm{IBr}(G) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ *und* $\mathrm{IPr}(G) = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$, *wobei* η_i *der Brauercharakter der projektiven Decke des zu* φ_i *gehörenden einfachen kG-Moduls ist.*

(i) Zwei projektive kG-Moduln sind genau dann isomorph, wenn sie den gleichen Brauercharakter besitzen.

(ii) $\mathbb{Z}\,\mathrm{IPr}(G)$ *ist ein freier* $\mathbb{Z}$*-Modul mit Basis* $\mathrm{IPr}(G)$. *Er enthält alle projektiven Brauercharaktere von* G. *Insbesondere ist* $\varphi_{FG} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(1)\,\eta_i$.

(iii) Für $a, b \in G_{p'}$ *gilt*

$$\sum_{i=1}^n \eta_i(a)\,\varphi_i(b^{-1}) = \begin{cases} |C_G(b)| & \textit{falls } a, b \textit{ konjugiert sind} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}.$$

Weiterhin sei $(K, \mathcal{O}, k)$ ein passendes p-modulares System und es sei $R = \mathcal{O}$ oder $R = k$. Ferner sei H eine Untergruppe von G. Ein RG-Modul M heißt *relativ H-projektiv*, falls für jede kurze exakte Sequenz $\alpha : 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ von RG-Moduln folgende Aussage gilt: Zerfällt die kurze exakte Sequenz von RH-Moduln $0 \longrightarrow \mathrm{res}_H^G M' \longrightarrow \mathrm{res}_H^G M'' \longrightarrow \mathrm{res}_H^G M \longrightarrow 0$, so zerfällt auch α.

Bemerkung 1.9. *Es sei* M *ein RG-Modul und* H *eine Untergruppe von* G. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) Der Modul M *ist relativ* H*-projektiv.*

(2) M *ist isomorph zu einem direkten Summanden von* $\mathrm{ind}_H^G \mathrm{res}_H^G M$.

(3) M *ist isomorph zu einem direkten Summanden von* $\mathrm{ind}_H^G L$ *für einen* kH*-Modul* L.

(4) M *ist relativ* H'*-projektiv für alle Untergruppen* $H' \geq_G H$ *von* G.

Es sei M ein unzerlegbarer RG-Modul. Eine Untergruppe D von G heißt *Vertex* von M, falls D ein minimales Element (bzgl. $\leq_G$) der Menge der Untergruppen H von G ist, für die M relativ H-projektiv ist. Da G endlich ist, besitzt jeder unzerlegbare Modul einen Vertex. Die Vertizes eines Moduls bilden genau eine Konjugationsklasse von p-Untergruppen von G. Ist D ein Vertex von M und L ein unzerlegbarer RD-Modul, so heißt L *Quelle* von M, falls M isomorph zu einem direkten Summanden von $\operatorname{ind}_D^G L$ ist. Sind die RD-Moduln L_1 und L_2 Quellen von M, so ist $L_2 \cong {}^g L_1$ für ein $g \in N_G(D)$. Siehe dazu [CR], Kap. 19.

Bemerkung 1.10. *Es seien H, D, D' Untergruppen von G. Außerdem seien M und L zwei RG-Moduln und V ein unzerlegbarer direkter Summand von $\operatorname{res}_H^G M$.*

(i) Ist M relativ H-projektiv, so ist auch $M \otimes_R L$ relativ H-projektiv.

(ii) Hat V Vertex D' und ist M unzerlegbar mit Vertex D, dann gilt $D' \leq_G D$.

Es sei $\mathcal{H}$ eine Menge von Untergruppen von G. Ein RG-Modul M heißt *relativ $\mathcal{H}$-projektiv*, falls es zu jedem unzerlegbaren direkten Summanden N von M ein $H \in \mathcal{H}$ gibt, so daß N relativ H-projektiv ist. Mit Hilfe der *Greenkorrespondenz* kann das Studium von RG-Moduln auf Untergruppen von G übertragen werden, über die man besser Bescheid weiß ([CR], 20.6). Dazu sei D eine p-Untergruppe von G, H eine Untergruppe von G mit $N_G(D) \leq H$, sowie

$$\mathcal{X} := \{Q \leq G \mid Q = D \cap {}^g D \text{ für ein } g \in G \backslash H\}$$

und

$$\mathcal{Y} := \{Q \leq G \mid Q = H \cap {}^g D \text{ für ein } g \in G \backslash H\}\,.$$

Bemerkung 1.11. *(i) Es sei M ein unzerlegbarer RG-Modul mit Vertex D. Dann ist $\operatorname{res}_H^G M = V \oplus W$, wobei V ein unzerlegbarer RH-Modul mit Vertex D und W ein relativ $\mathcal{Y}$-projektiver RH-Modul ist.*

(ii) Es sei V ein unzerlegbarer RH-Modul mit Vertex D. Dann ist $\operatorname{ind}_H^G V = M \oplus Z$, wobei M ein unzerlegbarer RG-Modul mit Vertex D und Z ein relativ $\mathcal{X}$-projektiver RG-Modul ist.

(iii) Durch (i) und (ii) erhält man eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen der unzerlegbaren RG-Moduln mit Vertex D und den Isomorphieklassen der RH-Moduln mit Vertex D.

Eine wichtige Klasse von RG-Moduln sind die Moduln, deren unzerlegbare direkte Summanden eine triviale Quelle besitzen. Ein solcher Modul wird *Trivial-Source-Modul* genannt. Ein unzerlegbarer RG-Modul M mit Vertex D ist also genau dann ein Trivial-Source-Modul, wenn M ein direkter Summand von $\operatorname{ind}_D^G R$ ist. Genau dann ist M ein direkter Summand des Permutationsmoduls RX einer Menge X auf der G operiert. Siehe [CR], Kap. 81B.

Bemerkung 1.12. *(i) Die Klasse der Trivial-Source-Moduln ist abgeschlossen bezüglich direkter Summe, direkten Summanden, Tensorprodukt, Induktion und Restriktion. Insbesondere ist der Greenkorrespondent eines Trivial-Source-Moduls wieder ein Trivial-Source-Modul.*

(ii) Ist M ein Trivial-Source-$\mathcal{O}G$-Modul, so ist $k \otimes_{\mathcal{O}} M$ ein Trivial-Source-kG-Modul. Ist umgekehrt L ein Trivial-Source-kG-Modul, so gibt es einen Trivial-Source-$\mathcal{O}G$-Modul M mit $L \cong k \otimes_{\mathcal{O}} M$.

(iii) Es sei D eine p-Untergruppe von G und M ein unzerlegbarer Trivial-Source-$kN_G(D)$-Modul mit Vertex D. Dann gilt:

(a) D operiert trivial auf M .

(b) M ist ein unzerlegbarer projektiver $k(N_G(D)/D)$-Modul.

(c) Unzerlegbare projektive $k(N_G(D)/D)$-Moduln und unzerlegbare Trivial-Source-$kN_G(D)$-Moduln mit Vertex D entsprechen sich.

(d) Jeder unzerlegbare Summand von $\mathrm{ind}_D^{N_G(D)} k$ hat Vertex D .

Aus der Bemerkung folgt, daß die Greenkorrespondenz eine Bijektion der Isomorphieklassen von unzerlegbaren Trivial-Source-kG-Moduln mit Vertex D und der Isomorphieklassen der unzerlegbaren projektiven $k(N_G(D)/D)$-Moduln liefert. Deshalb gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Trivial-Source-kG-Moduln.

Wie bereits erwähnt wurde, besitzt jeder kG-Modul eine Kompositionsreihe. Im allgemeinen hat ein kG-Modul mehrere Kompositionsreihen. Besitzt ein Modul nur eine, so heißt der Modul *einreihig*.

Bemerkung 1.13. *Es sei M ein kG-Modul.*

(i) Ist $M/J(M)$ ein einfacher kG-Modul, so ist M unzerlegbar.

(ii) Der Modul M ist genau dann einreihig, wenn die Radikalserie

$$M \supset J(M) \supset J^2(M) \supset \dots$$

eine Kompositionsreihe ist. Gegebenenfalls sind die kG-Moduln $M/J^n(M)$, $n \in \mathbb{N}$, unzerlegbar.

(iii) Es gilt $J^n(M) = J(kG)^n\, M = J^n(kG)\, M$ für $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Der Greenring $a(RG)$

Es sei $\mathcal{A}$ die freie abelsche Gruppe, welche von den Isomorphieklassen (M) aller RG-Moduln M erzeugt wird. Auf $\mathcal{A}$ kann eine Multiplikation definiert werden:

$$(M) \cdot (N) := (M \otimes_R N) \tag{1.1}$$

mit RG-Moduln M und N. Da $\mathcal{A}$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist, ist die lineare Fortsetzung von (1.1) auf $\mathcal{A}$ wohldefiniert. Auf diese Weise wird $\mathcal{A}$ zu einem kommutativen Ring mit Einselement (R) und Nullelement (0).

Mit der Konstruktion des Ringes $\mathcal{A}$ ist das Ziel, einen Ring zu finden, der nur von unzerlegbaren Moduln erzeugt wird, noch nicht erreicht. Deshalb wird die Untergruppe $\mathcal{A}_0$ von $\mathcal{A}$ betrachtet, welche von den Elementen der Form

$$(V) - (W) - (U)\,, \quad V \cong W \oplus U$$

mit RG-Moduln V, W, U erzeugt wird. Die Untergruppe $\mathcal{A}_0$ ist ein Ideal von $\mathcal{A}$. Der Quotient

$$a(RG) := \mathcal{A}/\mathcal{A}_0$$

heißt *Greenring*. Für zwei RG-Moduln M, N gilt dann

$$[M] + [N] = [M \oplus N]\,, \quad [M] \cdot [N] = [M \otimes_R N]\,.$$

Dabei bedeutet $[M] = (M) + \mathcal{A}_0$. Als $\mathbb{Z}$-Modul wird $a(RG)$ von den Isomorphieklassen der unzerlegbaren RG-Moduln erzeugt. Ist $a(RG)$ auch ein freier $\mathbb{Z}$-Modul? Diese Frage wird in der folgenden Bemerkung beantwortet.

Bemerkung 1.14. *Es seien V und W zwei RG-Moduln.*

(i) *Jedes Element $x \in a(RG)$ läßt sich in der Form $x = [M] - [N]$ mit RG-Moduln M und N schreiben.*

(ii) *$[V] = [W]$ gilt genau dann, wenn es einen RG-Modul U gibt mit $V \oplus U \cong W \oplus U$.*

(iii) *Gilt der Satz von Krull-Schmidt-Azumaya, dann ist $[V] = [W]$ genau dann, wenn $V \cong W$ ist. Außerdem ist*

$$a(RG) = \bigoplus_{V \in \mathcal{R}} \mathbb{Z}[V]\,,$$

wobei $\mathcal{R}$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen der unzerlegbaren RG-Moduln ist.

Um entsprechende Schwierigkeiten zu vermeiden, soll ab jetzt R stets ein Ring sein, so daß der Satz von Krull-Schmidt-Azumaya für RG gilt. Kenntnisse über $a(RG)$ lassen sich oft auf einem Umweg über Ringe der Form

$$A_S(RG) := S \otimes_{\mathbb{Z}} a(RG)\,,$$

wobei S ein kommutativer Ring ist, gewinnen. Somit ist $A_S(RG) \cong \bigoplus_{V \in \mathcal{R}} S[V]$, wobei $\mathcal{R}$ das obige Vertretersystem ist. Statt $A_{\mathbb{C}}(RG)$ schreibt man auch $A(RG)$. Betrachtet man auch den Greenring für eine Untergruppe H, so stehen eine Induktions- und eine Restriktionsabbildung zur Verfügung. Die Abbildung

$$\operatorname{res}^G_H : A_S(RG) \longrightarrow A_S(RH)\,, \quad [M] \longmapsto [\operatorname{res}^G_H M]$$

ist ein S-Algebrenhomomorphismus. Die Abbildung

$$\operatorname{ind}^G_H : A_S(RH) \longrightarrow A_S(RG)\,, \quad [N] \longmapsto [\operatorname{ind}^G_H N]$$

ist ein S-Modulhomomorphismus.

In [CR], Kap. 81, wird die Theorie des Greenrings eingeführt. Das Kapitel 81 basiert vorallem auf [BP] und [BC]. Die nächste Bemerkung entspricht [CR], 81.13 bzw. [BP], 6.7.

Bemerkung 1.15. *Es sei R ein Körper und H eine Untergruppe von G. Dann gilt*

(i) $A(RG) = \operatorname{ind}^G_H A(RH) \oplus \ker \operatorname{res}^G_H$ *(direkte Summe von Idealen)*

(ii) $A(RH) = \operatorname{res}^G_H A(RG) \oplus \ker \operatorname{ind}^G_H$ *(direkte Summe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen)*

Es sei q eine Primzahl und $H \le G$. Mit $O_q(H)$ wird die maximale normale q-Untergruppe von H bezeichnet. Die Gruppe H heißt *q-hypoelementar*, falls der Quotient $H/O_q(H)$ zyklisch ist. Gegegebenenfalls ist $O_q(H)$ eine q-Sylowgruppe und $H/O_q(H)$ eine q'-Gruppe. $H \le G$ ist genau dann q-hypoelementar, falls $H = Q \rtimes C$ ist. Dabei ist Q eine normale q-Gruppe und C eine zyklische q'-Gruppe. Dann ist $Q = O_q(H)$. Die Gruppe C muß nicht eindeutig bestimmt sein. Aber stets gilt $C \cong H/Q$.

Es sei $(K, \mathcal{O}, k)$ ein passendes p-modulares System. Ab jetzt sei $R = \mathcal{O}$ oder $R = k$. Die folgende Bemerkung beinhaltet *Conlons Induktionstheorem* ([CR], 80.61 und 81.32; [Ben], 5.6.8 und 5.6.9).

Bemerkung 1.16. *Es sei $\mathcal{H}$ die Menge aller p-hypoelementaren Untergruppen von G und $\{H_1, \ldots, H_r\} \subset \mathcal{H}$ ein Vertretersystem der Konjugationsklassen. Dann gilt*

(i) $A(RG) = \sum_{H \in \mathcal{H}} \operatorname{ind}^G_H A(RH)$

(ii) Die Abbildung

$$A(RG) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} A(RH_i)\,, \quad x \longmapsto (\mathrm{res}^G_{H_1} x, \ldots, \mathrm{res}^G_{H_r} x)$$

ist injektiv.

Für eine Untergruppe H von G sei $a(RG,H)$ die Untergruppe von $a(RG)$, welche von den Isomorphieklassen der relativ H-projektiven RG-Moduln erzeugt wird. Wegen Bemerkung 1.10 ist $a(RG,H)$ ein Ideal von $a(RG)$. Für eine Menge $\mathcal{H}$ von Untergruppen wird entsprechend $a(RG,\mathcal{H})$ definiert. Die Greenkorrespondenz von Moduln (siehe Seite 14) hat eine Analogie im Greenring: *Greens Transfer Theorem* ([Gr64]; [CR], 81.35). In der nächsten Bemerkung wird es formuliert.

Bemerkung 1.17. *Es sei D eine p-Untergruppe von G, $H \leq G$ mit $N_G(D) \leq H$ und $\mathcal{X}$ wie auf Seite 14 definiert. Außerdem sei $\mathcal{H}$ eine Menge von echten Untergruppen von D mit $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} a(RG,D)/a(RG,\mathcal{H}) &\longrightarrow a(RH,D)/a(RH,\mathcal{H}) \\ [M] + a(RG,\mathcal{H}) &\longmapsto [V] + a(RH,\mathcal{H}) \end{aligned}$$

ist ein Ringisomorphismus. Dabei sind M und V unzerlegbare Moduln, welche in Greenkorrespondenz stehen.

Mit $A_S(RG,\mathrm{Triv})$ wird die von den Trivial-Source-Moduln erzeugte Untergruppe von $A_S(RG)$ bezeichnet. Da $A_S(RG,\mathrm{Triv})$ multiplikativ abgeschlossen ist und das Einselement von $A_S(RG)$ enthält (siehe Bemerkung 1.12), ist $A_S(RG,\mathrm{Triv})$ ein Teilring von $A_S(RG)$. Da es nur endlich viele Isomorphieklassen von Trivial-Source-RG-Moduln gibt, ist $A_S(RG,\mathrm{Triv})$ ein freier S-Modul von endlichem Rang.

Bemerkung 1.18. *(i) Es gilt $A_S(\mathcal{O}G,\mathrm{Triv}) \cong A_S(kG,\mathrm{Triv})$.*

(ii) Es sei D eine p-Untergruppe von G. Es gibt ein Idempotent $e \in A(RG,\mathrm{Triv})$, so daß $A(RG,D) = A(RG)\,e$ gilt.

Es sei T ein beliebiger kommutativer Ring und A eine kommutative T-Algebra oder ein Ideal einer T-Algebra. Ein T-Algebrenhomomorphismus $s : A \longrightarrow T$ ungleich Null heißt *Spezies* von A. Dabei wird ein Ideal als Algebra evtl. ohne Einselement aufgefaßt. Mit $\mathrm{Sp}(A)$ wird die Menge der Spezies von A bezeichnet. Im Folgenden sei T ein Körper. Eine Spezies t eines Ideals I von A läßt sich eindeutig zu einer Spezies s von A fortsetzen: $s(x) := t(xf)$ für $x \in A$ und $f \in I$ mit $t(f) = 1$. Zwei Spezies, die auf einem Ideal ungleich Null übereinstimmen, sind also identisch. Zwischen einer Spezies eines Ideals und der Fortsetzung auf die gesamte Algebra wird sprachlich oft nicht unterschieden. Ist $s \in \mathrm{Sp}(A)$ und $e \in A$ ein Idempotent, so ist $s(e) = 1$ oder $s(e) = 0$. Es sei $A = I \oplus J$ eine Zerlegung von A in Ideale. Da $I = Ae$ und $J = A(1-e)$ für ein Idempotent $e \in A$ gilt, ist entweder $s|I \neq 0$ oder $s|J \neq 0$, also entweder $s|I \in \mathrm{Sp}(I)$ oder $s|J \in \mathrm{Sp}(J)$.

Es sei s eine Spezies von $A(kG)$. Eine Untergruppe $D \leq G$ heißt *Vertex* von s, falls D ein minimales Element der Menge der Vertizes der unzerlegbaren kG-Moduln M mit $s([M]) \neq 0$ ist. Mit $\mathrm{Sp}(A(kG), D)$ wird die Menge aller Spezies von $A(kG)$ mit Vertex D bezeichnet. Aus dieser Definition und der Definition von $A(kG, D)$ folgt

Bemerkung 1.19. *Es sei $s \in \mathrm{Sp}(A(kG))$ und $D \leq G$. Die Spezies s hat genau dann Vertex D, wenn $s(A(kG, D)) \neq 0$ und $s(A(kG, D')) = 0$ für alle $D' \leq G$ mit $D' < D$ ist.*

Für eine Untergruppe $H \leq G$ und $t \in \mathrm{Sp}(A(kH))$ ist $t \circ \mathrm{res}_H^G$ eine Spezies von $A(kG)$. Aus Bemerkung 1.15 und den obigen Aussagen über die Spezies eines direkten Summanden einer Algebra folgt die Äquivalenz von (2) und (3) der nächsten Bemerkung. Zur Äquivalenz von (1) und (3) siehe [CR], 81.45.

Bemerkung 1.20. *Es sei $s \in \mathrm{Sp}(A(kG))$ und $H \leq G$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $s = u \circ \mathrm{res}_H^G$ *mit* $u \in \mathrm{Sp}(A(kH))$

(2) $\ker \mathrm{res}_H^G \subset \ker s$

(3) $\mathrm{ind}_H^G A(kH) \not\subset \ker s$

Es sei s eine Spezies von $A(kG)$. Eine Untergruppe H von G heißt *Ursprung* von s, falls $s = u \circ \mathrm{res}_H^G$ für ein $u \in \mathrm{Sp}(A(kH))$ und $s \neq u' \circ \mathrm{res}_{H'}^G$ für alle $H' < H$ und alle $u' \in \mathrm{Sp}(A(kH'))$ gilt. Bemerkung 1.21 stellt einen Zusammenhang zwischen Ursprung und Vertex einer Spezies her.

Bemerkung 1.21. *(i) Die Ursprünge einer Spezies von $A(kG)$ bilden eine Konjugationsklasse von Untergruppen von G.*

(ii) Ein Ursprung einer Spezies ist eine p-hypoelementare Gruppe.

(iii) Ist H ein Ursprung einer Spezies s von $A(kG)$, so ist $O_p(H)$ ein Vertex von s.

Mit Bemerkung 1.20 bekommt man für $H \leq G$

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{ind}_H^G A(kH)) = \{u \circ \mathrm{res}_H^G \mid u \in \mathrm{Sp}(A(kH))\}\,. \tag{1.2}$$

Nach Bemerkung 1.16 gilt dann

$$\operatorname{Sp}(A(kG)) = \{u \circ \operatorname{res}_H^G \mid H \in \mathcal{H}\,, u \in \operatorname{Sp}(A(kH))\}\,.$$

Nach D. Higman gibt es genau dann endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer kG-Moduln, wenn G eine zyklische p-Sylowgruppe besitzt (siehe [Hig]; [Pie], Thrm 10.8). Gegebenenfalls ist $A(kG)$ eine endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Algebra. J. Green und M. O'Reilly haben gezeigt, daß $A(kG)$ halbeinfach ist (siehe [Gr62]; [Rei]; [Ben], Thrm 5.8.7). Nach dem Satz von Wedderburn ist dann $A(kG)$ isomorph zu $\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$. Ab jetzt habe G eine zyklische p-Sylowgruppe.

Bemerkung 1.22. *Hat G eine zyklische p-Sylowgruppe und ist $n := \dim_{\mathbb{C}} A(kG)$, so ist $A(kG) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Algebra.*

Es gilt also $A(kG) = \mathbb{C}\, e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\, e_n$ mit eindeutig bestimmten primitiven Idempotenten $e_1, \ldots, e_n$. Ein beliebiges Idempotent von $A := A(kG)$ ist eine Summe von primitiven Idempotenten. Die Ideale von A sind genau die Mengen Af, wobei f ein Idempotent von A ist. Ist $I := Af$ ein Ideal von A, so ist $A = I \oplus J$ eine Zerlegung in Ideale mit $J = A(1-f)$. Eine Unteralgebra B von A ist ebenfalls halbeinfach. Ein primitives Idempotent von B läßt sich schreiben als Summe von primitiven Idempotenten von A.

Es sei $s \in \operatorname{Sp}(A(kG))$. Da $e_1 + \cdots + e_n = 1$ eine Zerlegung der 1 in (primitive) Idempotente ist, ist $s(e_i) = 1$ für genau ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ferner ist s durch die Bilder der primitiven Idempotente eindeutig bestimmt. Es existieren also genau n verschiedene Spezies von $A(kG)$. Sie sind linear unabhängig. Für eine Unteralgebra B und ein Ideal I von $A(kG)$ erhält man die Spezies durch Einschränken der Spezies von $A(kG)$ auf B bzw. I. Es gilt also

$$\operatorname{Sp}(B) = \{s|B : s \in \operatorname{Sp}(A(kG))\}\,, \quad \operatorname{Sp}(I) = \{s|I : s \in \operatorname{Sp}(A(kG)), s(f) = 1\}\,, \tag{1.3}$$

wobei f ein Idempotent mit $I = A(kG)f$ ist. Für zwei Spezies s_1, s_2 und primitive Idempotente e_1, e_2 von $A(kG)$ mit $s_i(e_i) = 1$ für $i = 1, 2$ gilt $s_1|B = s_2|B$ genau dann, wenn e_1 und e_2 als Summanden eines primitiven Idempotents von B vorkommen.

Bemerkung 1.23. *Es sei $\operatorname{Sp}(A(kG)) = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Die Abbildung*

$$A(kG) \longrightarrow \mathbb{C}^n\,, \quad x \longmapsto (s_1(x), \ldots, s_n(x))$$

ist ein $\mathbb{C}$-Algebrenisomorphismus. Die primitiven Idempotente von $A(kG)$ sind die Urbilder der Standardbasisvektoren von $\mathbb{C}^n$. Ferner ist

$$A(kG)^* = \{x \in A(kG) \mid s(x) \neq 0 \text{ für alle } s \in \operatorname{Sp}(A(kG))\}$$

die Einheitengruppe von $A(kG)$.

Zwei kG-Moduln M und N sind also genau dann isomorph, wenn $s([M]) = s([N])$ für alle Spezies s von $A(kG)$ gilt. Die Matrix $S = (s([M]))_{s,M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, wobei s die Spezies von $A(kG)$ und $[M]$ die Isomorphieklassen der unzerlegbaren kG-Moduln durchläuft, heißt *Speziestafel*. Dieser Begriff wird in Anlehnung an den Begriff Charaktertafel gewählt. Durch Invertieren der Speziestafel S bekommt man die primitiven Idempotente von $A(kG)$. Ist $S^{-1} = (a_{s,M}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so sind

$$e_s = \sum_M a_{s,M}\,[M]\,, \quad s \in \mathrm{Sp}(A(kG))$$

die primitiven Idempotente mit $s(e_s) = 1$. Die schöne Eigenschaft, daß eine Isomorphieklasse von kG-Moduln durch die Spezieswerte eindeutig bestimmt ist, gilt für eine Gruppe mit nichtzyklischer p-Sylowgruppe im allgemeinen nicht. J. Zemanek wies nach, daß der Greenring $a(kH)$ für $p > 2$ und einer Gruppe H mit einer nichtzyklischen p-Sylowgruppe nilpotente Elemente ungleich Null besitzt ([Zem]; [BC]; [CR], 81.97). Ist $x \in a(kH)$ ein solches Element, dann ist $s(x) = 0$ für alle Spezies s von $A(kH)$. Da $x = [M] - [N]$ mit kH-Moduln M und N gilt (Bem. 1.11), ist dann $s([M]) = s([N])$ für alle Spezies von $A(kH)$ und $M \ncong N$.

Es sei M ein unzerlegbarer kG-Modul. Betrachte den $\mathbb{C}$-Vektorraumendomorphismus

$$\phi : A(kG) \longrightarrow A(kG)\,, \quad x \longmapsto [M]\cdot x\,.$$

Das Minimalpolynom $f \in \mathbb{C}[X]$ von ϕ ist das *Minimalpolynom* von $[M]$. Ist s eine Spezies von $A(kG)$, so ist $s([M])$ eine Nullstelle von f, denn es gilt $f(s([M])) = s(f([M])) = 0$. Die Abbildungsmatrix von ϕ bezüglich der Basis $\{[M_1],\dots,[M_n]\}$, wobei die M_i Vertreter der unzerlegbaren kG-Moduln sind, hat natürliche Zahlen als Koeffizienten. Somit ist $f \in \mathbb{Z}[X]$, also $s([M])$ eine algebraisch ganze Zahl. Adjungiert man zu $\mathbb{Q}$ die Spezieswerte der unzerlegbaren Moduln, so erhält man einen algebraischen Zahlkörper L. Mit $\mathcal{O}_L$ wird der Ring der ganzen Zahlen von L bezeichnet.

Bemerkung 1.24. *Es sei L wie oben definiert und $n = \dim_C A(kG)$. Dann gilt:*

(i) $s([M]) \in \mathcal{O}_L$ *für alle* $s \in \mathrm{Sp}(A(kG))$ *und alle kG-Moduln M*

(ii) $\mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG)) = \{s|A_{\mathcal{O}_L}(kG) : s \in \mathrm{Sp}(A(kG))\}$

(iii) $|\,\mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))| = n$

(iv) $A_L(kG) \cong L^n$ *als L-Algebra*

Für $s \in \mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$ wird auch die Fortsetzung $A(kG) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit s bezeichnet. Zum Studium der Idempotente und Primideale des Ringes $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ werden Topologiekenntnisse benötigt. Die Aussagen dieses Abschnitts können in [Kun] oder [Jac] nachgelesen werden. Es sei A ein beliebiger kommutativer Ring. Mit $\operatorname{Spec} A$ wird das *Spektrum* von A, also die Menge der Primideale von A, bezeichnet. Setze

$$\mathcal{V}(I) := \{P \in \operatorname{Spec}(A) \mid I \subset P\}\,,$$

wobei I ein Ideal von A ist. Die Mengen $\mathcal{V}(I)$, wobei I alle Ideale von A durchläuft, sind definitionsgemäß die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec}(A)$. Man nennt diese Topologie *Zariski-Topologie*. Die Mengen

$$\mathcal{D}(a) := \{P \in \operatorname{Spec}(A) \mid a \notin P\} = \operatorname{Spec}(A)\backslash\mathcal{V}(a)\,, \quad a \in A\,,$$

sind offen und bilden eine Basis von $\operatorname{Spec}(A)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\{e \in A \mid e \text{ ist Idempotent}\} &\longrightarrow \{X \subset \operatorname{Spec}(A) \mid X \text{ offen und abgeschlossen}\}\\ e &\longmapsto \mathcal{D}(e)\end{aligned}$$

ist eine Bijektion ([Jac], Thrm 7.3). Ein Idempotent $e \in A$ ist genau dann primitiv, wenn $\mathcal{D}(e)$ eine Zusammenhangskomponente bildet.

Im folgenden wird gezeigt, wie man aus den Spezies von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ die Primideale von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ und $a(kG)$ sowie die Idempotente von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ erhält. Diese Methode ist auf andere Darstellungsringe übertragbar (siehe [Kl], [DK] und [Dei]).

Es sei $A := A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ und $\mathcal{P}$ ein Primideal von A. Nach Bemerkung 1.23 ist $\prod_{s\in\operatorname{Sp}(A)} \ker s \subset \bigcap_{s\in\operatorname{Sp}(A)} \ker s = 0$. Also ist $\ker s \subset \mathcal{P}$ für ein $s \in \operatorname{Sp}(A)$. Dann ist $x - s(x)\,1_A \in \mathcal{P}$ für alle $x \in A$. Daraus folgt $s(\mathcal{P}) = \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_L$. Da $\mathcal{O}_L$ ein Dedekindring ist, ist jedes Primideal ungleich Null von $\mathcal{O}_L$ maximal. Daher gilt

Bemerkung 1.25. *(i) Die Primideale von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ sind*

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s) := s^{-1}(\mathfrak{p})\,, \quad \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)\,, \quad s \in \operatorname{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))\,.$$

(ii) Der Ring $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ hat Krulldimension 1. Insbesondere sind die Primideale $\mathcal{P}(0, s) = \ker s$ minimal und Primideale der Form $\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s)$ mit $\mathfrak{p} \neq 0$ maximal.

Ist $\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s) = \mathcal{P}(\mathfrak{q}, t)$, so ist $\mathfrak{p}\,1_A \subset \mathcal{P}(\mathfrak{p}, s) = \mathcal{P}(\mathfrak{q}, t)$ und $\mathfrak{p} = t(\mathfrak{p}\,1_A) \subset \mathfrak{q}$. Da dann auch $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ gilt, ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Außerdem ist $x - s(x)\,1_A \in \ker s = \mathcal{P}(0, s) \subset \mathcal{P}(\mathfrak{p}, s) = \mathcal{P}(\mathfrak{p}, t)$, also $t(x) \equiv s(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $x \in A$. Gilt $t(x) \equiv s(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $x \in A$, dann ist $\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s) = \mathcal{P}(\mathfrak{p}, t)$. Dies zeigt:

Bemerkung 1.26. *Es seien s und t Spezies von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ und $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Primideale von $\mathcal{O}_L$.*

(i) Es gilt $\mathcal{P}(\mathfrak{p},s)=\mathcal{P}(\mathfrak{q},t)$ genau dann, wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ und $s(x)\equiv t(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $x\in A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ gilt.

(ii) Für eine Spezies s von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ ist

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}(0,s))=\{\mathcal{P}(\mathfrak{p},s)\mid \mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)\}\,.$$

Der topologische Abschluß von $\{\mathcal{P}(0,s)\}$ ist $\mathcal{V}(\mathcal{P}(0,s))$. Da eine Zusammenhangskomponente abgeschlossen ist, sind $\mathcal{P}(\mathfrak{p},s)$ und $\mathcal{P}(\mathfrak{q},s)$ mit $\mathfrak{p},\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)$ in der selben Zusammenhangskomponente. Außerdem ist eine Zusammenhangskomponente eine Vereinigung von $\mathcal{V}(\mathcal{P}(0,s))$ mit $s\in\operatorname{Sp}(A)$. Zwei minimale Ideale $\mathcal{P}(0,s)$ und $\mathcal{P}(0,t)$ gehören also genau dann zur selben Zusammenhangskomponente, falls es ein $m\in\mathbb{N}$ und Spezies $s_0=s,s_1,\dots,s_m=t$ gibt mit

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}(0,s_{i-1}))\cap\mathcal{V}(\mathcal{P}(0,s_i))\neq\emptyset\,,\quad 1\le i\le m\,.$$

Nach Bemerkung 1.26 ist

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}(0,s))\cap\mathcal{V}(\mathcal{P}(0,t))=\{\mathcal{P}(\mathfrak{p},s)\mid \mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)\,,s\equiv t \pmod{\mathfrak{p}}\}$$

für Spezies s und t . Deswegen gilt:

Bemerkung 1.27. *Es seien s und t Spezies von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ und $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Primideale von $\mathcal{O}_L$.*

(i) Die Primideale $\mathcal{P}(\mathfrak{p},s)$ und $\mathcal{P}(\mathfrak{q},t)$ liegen genau dann in der selben Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Spec}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$, wenn es Spezies $s_0,s_1,\dots,s_m$ von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ und Primideale $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_m$ von $\mathcal{O}_L$ mit $s_0=s$, $s_m=t$, $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_m=\mathfrak{q}$ und

$$s_0\equiv s_1 \pmod{\mathfrak{p}_1}\,,\quad s_1\equiv s_2 \pmod{\mathfrak{p}_2}\,,\quad \dots\,,\quad s_{m-1}\equiv s_m \pmod{\mathfrak{p}_m}$$

gibt.

(ii) Es gilt $\mathcal{P}(0,t)\subset\mathcal{P}(\mathfrak{p},s)$ genau dann, wenn $s\equiv t \pmod{\mathfrak{p}}$ ist.

Zwei Spezies s und t von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ heißen *zusammenhängend* ($s\sim t$), falls $\mathcal{P}(\mathfrak{p},s)$ und $\mathcal{P}(\mathfrak{p},t)$ für ein $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)$ in der selben Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Spec}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$ liegen. Auf diese Weise wird $\operatorname{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$ in *Zusammenhangsklassen* eingeteilt. Also sind

$$Z_s=\{\mathcal{P}(\mathfrak{p},t)\mid \mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)\,,t\in\operatorname{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))\,,s\sim t\}\,,\quad s\in\operatorname{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$$

die Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Spec}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$. Wie man sieht, stehen die Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Spec}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$ in Bijektion zu den Zusammenhangsklassen von $\mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$.

Ist e ein primitives Idempotent von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$, dann ist $\mathcal{D}(e) = Z_s$ für eine Spezies s von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$. Außerdem ist e eine Summe primitiver Idempotente von $A_{\mathbb{C}}(kG)$. Eine primitives Idempotent $e_t \in A_{\mathbb{C}}(kG)$ mit $t \in \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{C}}(kG))$ und $t(e_t) = 1$ ist genau dann ein Summand von e, wenn $t(e) = t(e_t) = 1 \notin \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_L$ ist. Genau dann ist $e \notin \mathcal{P}(\mathfrak{p}, t)$, also $\mathcal{P}(\mathfrak{p}, t) \in \mathcal{D}(e)$. Somit gilt

Bemerkung 1.28. *Die primitiven Idempotente von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ sind*

$$\sum_{s\sim t} e_t\,, \quad s \in \mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))\,,$$

wobei $t \in \mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$ und e_t das primitive Idempotent von $A(kG)$ mit $t(e_t) = 1$ ist.

Aus dem Primspektrum von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ wird das Primspektrum von $a(kG)$ abgeleitet. Dazu wird $a(kG)$ als Teilring von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$ aufgefaßt. Da $\mathcal{O}_L$ eine ganze Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$ ist, ist $A_{\mathcal{O}_L}$ eine ganze Ringerweiterung von $a(kG)$. Also sind $\mathcal{P} \cap a(kG)$ mit $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$ die Primideale von $a(kG)$. Die Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$ operiert auf $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$:

$$\sigma(x \otimes y) := \sigma(x) \otimes y\,, \quad \sigma \in G(L/\mathbb{Q})\,, \quad x \in \mathcal{O}_L\,, \quad y \in a(kG)\,.$$

Dann ist

$$A_{\mathcal{O}_L}(kG)^{G(L/\mathbb{Q})} = \{x \in A_{\mathcal{O}_L}(kG) \mid \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in G(L/\mathbb{Q})\} = a(kG)$$

Es seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ Primideale von $A_{\mathcal{O}_L}(kG)$. Ist $\mathcal{P}' = \sigma(\mathcal{P})$ für ein $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$, dann ist $\mathcal{P}' \cap a(kG) = \sigma(\mathcal{P} \cap a(kG)) = \mathcal{P} \cap a(kG)$. Es gelte nun $\mathcal{P}' \cap a(kG) = \mathcal{P} \cap a(kG)$ und $\mathcal{P}' \neq \sigma(\mathcal{P})$ für alle $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$. Dann ist $\mathcal{P}'$ nicht in $\bigcup_{\sigma \in G(L/\mathbb{Q})} \sigma(\mathcal{P})$ enthalten. Für $y \in \mathcal{P}' \setminus \bigcup_{\sigma \in G(L/\mathbb{Q})} \sigma(\mathcal{P})$ gilt

$$\prod_{\sigma \in G(L/\mathbb{Q})} \sigma(y) \in \mathcal{P}' \cap A_{\mathcal{O}_L}(kG)^{G(L/\mathbb{Q})} = \mathcal{P}' \cap a(kG) = \mathcal{P} \cap a(kG)\,.$$

Somit ist $\tau(y) \in \mathcal{P}$ für ein $\tau \in G(L/\mathbb{Q})$, was der Voraussetzung von y widerspricht. Also gilt

Bemerkung 1.29. *(i) Die Primideale von $a(kG)$ sind*

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s) \cap a(kG) = \{x \in a(kG) \mid s(x) \in \mathfrak{p}\}$$

mit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$ und $s \in \mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$.

(ii) Es gilt $\mathcal{P} \cap a(kG) = \mathcal{P}' \cap a(kG)$ mit $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathrm{Spec}(A_{\mathcal{O}_L}(kG))$ genau dann, wenn $\mathcal{P}' = \sigma(\mathcal{P})$ für ein $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$ ist.

Kapitel 2

Unzerlegbare Moduln

Ab jetzt habe G eine zyklische p-Sylowgruppe der Ordnung p^d mit $d \in \mathbb{N}$. Eine solche Gruppe wird fixiert und mit P bezeichnet. Ein Erzeuger sei $\sigma \in P$. Mit P_a, $0 \leq a \leq d$, wird die Untergruppe von P mit p^a Elementen bezeichnet. Weiterhin sei $(K, \mathcal{O}, k)$ ein passendes p-modulares System.

In diesem Kapitel wird das Rechnen im Greenring vorbereitet. Die unzerlegbaren kG-Moduln werden beschrieben und ihre für den Greenring wichtigen Eigenschaften herausgearbeitet. Es genügt, für jede Untergruppe $D \leq P$ die $kN_G(D)$-Moduln mit Vertex D zu untersuchen (Satz 2.14). Die Greenkorrespondenz (Bemerkung 1.11) liefert dann alle kG-Moduln (Satz 2.25). Satz 2.18 und Korollar 2.24 zeigen, daß die $kN_G(D)$-Moduln sich durch kD-Moduln und $kN_G(D)$-Moduln mit trivialer Quelle und Vertex D sowie die Faktorgruppe $N_G(D)/C_G(D)$ charakterisieren lassen. Präzisere Ergebnisse werden mit Hilfe der Spezies des Greenrings $A(kG)$ im nächsten Kapitel ermittelt.

2.1 Die unzerlegbaren kP-Moduln

Da P eine p-Gruppe und $\operatorname{char} k = p$ ist, ist der triviale Modul bis auf Isomorphie der einzige einfache kP-Modul. Der einzige unzerlegbare projektive kP-Modul ist die Gruppenalgebra kP selbst. Im nächsten Satz werden die weiteren unzerlegbaren Moduln konstruiert. Das Ergebnis ist wohlbekannt.

Satz 2.1. *Es ist*

$$J^j(kP) = (\sigma - 1)^j \, kP \, , \quad 0 \leq j \leq p^d \, .$$

Die Moduln

$$T_j := kP/J^j(kP) = kP/(\sigma - 1)^j kP \, , \quad 1 \leq j \leq p^d$$

bilden ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen unzerlegbarer kP-Moduln. Es gilt $\dim_k T_j = j$.

Beweis. Es sei $I := (\sigma-1)kP = kP(\sigma-1)$. Da $I^{p^d} = (\sigma-1)^{p^d}kP = (\sigma^{p^d}-1)kP = 0$ ist, ist I ein nilpotentes Ideal. Folglich ist es in $J(kP)$ enthalten. Da $\dim_k J(kP) \le p^d - 1 = \dim_k I$ ist, ist $J(kP) = I$. Nach Bemerkung 1.13 ist $J^j(kP) = J(kP)^j = (\sigma-1)^j\, kP$ für $j \in \mathbb{N}$. Somit ist $\dim_k J^j(kP) = p^d - j$ und $J^j(kP)/J^{j+1}(kP)$ ist ein eindimensionaler, also einfacher, kP-Modul. Folglich ist die Radikalserie von kP eine Kompositionsreihe. Deshalb ist kP einreihig und $T_j = kP/J^j(kP)$ mit $j \in \{1,\ldots,p^d\}$ sind j-dimensionale unzerlegbare kP-Moduln (siehe Bemerkung 1.13).

Es sei M ein unzerlegbarer kP-Modul und $\Delta : P \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(M)$ eine Darstellung von P über k. Da $\Delta(\sigma)^{p^d} = 1$ ist, ist das charakteristische Polynom von $\Delta(\sigma)$ ein Teiler von $X^{p^d} - 1 = (X-1)^{p^d} \in k[X]$. Somit besteht die Jordan-Normalform von $\Delta(\sigma)$ aus genau einem Jordan-Block der Größe $j \times j$, $1 \le j \le p^d$, mit Eigenwert 1. Also existieren bis auf Ähnlichkeit höchstens p^d unzerlegbare Darstellungen von P über k, bzw. bis auf Isomorphie höchstens p^d unzerlegbare kP-Moduln. □

Wie man sieht, ist ein unzerlegbarer kP-Modul durch seine Dimension bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Die Dimension eines unzerlegbaren kP-Moduls M ist die natürliche Zahl n, welche die Bedingungen $(\sigma-1)^{n-1}M \ne 0$ und $(\sigma-1)^n M = 0$ erfüllt. Außerdem ist ein unzerlegbarer kG-Modul M zyklisch, d.h. es gibt ein $x \in M$ mit $M = kP\{x\}$. Setzt man $b_i = (\sigma-1)^{i-1}\, x$, $1 \le i \le n$, so erhält man eine geordnete k-Basis von M, bezüglich der $\Delta(\sigma)$ Jordan-Normalform hat. Dann ist

$$\sigma \cdot b_i = b_i + b_{i+1}\,, \quad \sigma \cdot b_j = b_j\,, \quad 1 \le i < n\,.$$

Eine solche Basis wird *Standardbasis* von M genannt. Beispielsweise ist für $j \in \{1,\ldots,p^d\}$ durch

$$b_i := (\sigma-1)^{i-1} + (\sigma-1)^j\, kP\,, \quad 1 \le i \le j \tag{2.1}$$

eine Standardbasis von T_j gegeben. In den folgenden Lemmata wird das allgemeine Verhalten von kP-Moduln untersucht. Dazu gehört die Zerlegung in direkte Summanden, die Restriktion auf Untergruppen und das Tensorprodukt zweier Moduln. Es wird das Ziel verfolgt, mit möglichst geringem Aufwand alle für die Konstruktion der Spezies von $A(kP)$ notwendigen Tensorprodukte zu bestimmen (Satz 2.9). Desweiteren wird das Unterkapitel über kG-Moduln vorbereitet (Lemma 2.4 und Lemma 2.6, (i)) Die grundlegende Arbeit über Tensorprodukte von kP-Moduln stammt von J. Green ([Gr62]). In [Gr62] findet man die Aussagen von Lemma 2.4; 2.5; 2.6, (iii); 2.7. Die Beweisidee des nächsten Lemmas ist [Fei] (Lemma IX, 2.5) entnommen.

Lemma 2.2. *Die Anzahl der direkten Summanden von $T_i \otimes_k T_j$ ist* $\min\{i,j\}$.

Beweis. Die Anzahl der direkten Summanden von $T_i \otimes_k T_j$ ist $\dim_k \mathrm{Hom}_{kP}(k, T_i \otimes_k T_j)$. Nach Bemerkung 1.1 ist

$$\mathrm{Hom}_{kP}(k, T_i \otimes_k T_j) = \mathrm{Hom}_{kP}(k, T_i^* \otimes_k T_j) \cong \mathrm{Hom}_{kP}(T_i, T_j)$$

als k-Vektorräume. Die Abbildungen $f_l : T_i \longrightarrow T_j$, $1 \leq l \leq \min\{i,j\}$, welche die ersten l Standardbasisvektoren von T_i auf die letzten l Standardbasisvektoren von T_j abbilden und die anderen Basisvektoren auf Null abbilden, sind kP-Homomorphismen und bilden eine k-Basis von $\mathrm{Hom}_{kP}(T_i, T_j)$. □

Lemma 2.3. *Es sei M ein kP-Modul, $m \in M$, $j \in \{1,\ldots,p^d\}$ und $\{b_1,\ldots,b_j\}$ eine Standardbasis von T_j. Dann ist*

$$\sigma^n\, b_i = \sum_{t=0}^{j-i} \binom{n}{t} b_{i+t}\,, \quad (\sigma-1)^n\, b_i = \begin{cases} b_{i+n} & \text{falls } i+n \leq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.2}$$

und

$$(\sigma-1)^n\,(b_i \otimes m) = \sum_{t=0}^{j-i} \binom{n}{t} b_{i+t} \otimes (\sigma-1)^{n-t}\sigma^t\, m\,, \tag{2.3}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1,\ldots,j\}$ ist. Ist $(\sigma-1)^n\,(b_i \otimes m) = 0$, dann ist $(\sigma-1)^n\,(b_r \otimes m) = 0$ für alle $r \in \{i,\ldots,j\}$.

Beweis. Die erste und die zweite Formel folgen direkt aus der Definition des Standardbasisvektors. Es gilt

$$(\sigma-1)(b_i \otimes m) = b_i \otimes (\sigma-1)m + b_{i+1} \otimes \sigma m\,, \quad (\sigma-1)(b_j \otimes m) = b_j \otimes (\sigma-1)m\,.$$

Durch Iterieren dieser Formeln erhält man die dritte Formel des Lemmas. Es ist $(\sigma-1)^n\,(b_i \otimes m) = 0$ genau dann, wenn $\sum_{t=0}^{j-i} \binom{n}{t} b_{i+t} \otimes (\sigma-1)^{n-t}\sigma^t\, m = 0$ gilt. Genau dann ist $\binom{n}{t} = 0$ in k oder $(\sigma-1)^{n-t}\sigma^t\, m = 0$ für alle $0 \leq t \leq j-i$. Daraus ergibt sich die letzte Behauptung des Lemmas. □

Für eine Untergruppe $D \leq P$ werden die Vertreter der unzerlegbaren kD-Moduln ebenfalls mit T_j, $1 \leq j \leq |D|$, bezeichnet. Durch Inflation von kD-Moduln erhält man kP-Moduln. Dazu sei $\psi : P \longrightarrow D$, $\sigma \longmapsto \sigma^{(P:D)}$ und $Q = \ker\psi$. Dann ist $D \cong P/Q$. Ist $1 \leq j \leq |D|$ und M ein unzerlegbarer $k(P/Q)$-Modul mit $\dim_k M = j$, so ist $\inf_{P/Q}^P M$ ein unzerlegbarer kP-Modul. Also ist $T_j = \inf_{P/Q}^P M$.

Lemma 2.4. *Es seien $j \in \{1,\ldots,p^d\}$, $\{b_1,\ldots,b_j\}$ eine Standardbasis von T_j, $D \leq P$, also $D = \langle\rho\rangle$ mit $\rho = \sigma^{(P:D)}$, und es sei*

$$M_i := k\,\{(\rho-1)^n\, b_i \mid n \in \mathbb{N}\} = k\,\{b_i, b_{i+(P:D)}, b_{i+2(P:D)}, \ldots\}$$

mit $1 \leq i \leq p^d$ und $b_n := 0$, falls $n > j$ ist. Dann ist

$$\mathrm{res}_D^P\, T_j = M_1 \oplus \cdots \oplus M_{(P:D)}$$

eine Zerlegung von $\mathrm{res}_D^P T_j$ *in unzerlegbare* kD*-Moduln. Schreibe* $j = (P : D)m + t$ *mit* $0 \leq m \leq |D|$ *und* $0 \leq t < (P : D)$ *. Dann gilt*

$$\mathrm{res}_D^P T_j \cong \bigoplus_{i=1}^{t} T_{m+1} \oplus \bigoplus_{i=t+1}^{(P:D)} T_m \,.$$

Beweis. Es sei $i \in \{1, \dots, j\}$. Offensichtlich ist M_i ein kD-Modul. Da $M_i/J(M_i) = k\{b_i + J(M_i)\}$ ein einfacher Modul ist, ist M_i unzerlegbar.

Die Moduln M_i werden von $\mathcal{B}_i := \{b_i, b_{i+(P:D)}, \dots\}$ erzeugt. Da die $\mathcal{B}_i$ paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung die Standardbasis $\{b_1, \dots, b_j\}$ von T_j bildet, ist $\mathrm{res}_D^P T_j$ eine direkte Summe der Moduln M_i . Ist $i \leq t$, so ist $\dim_k M_i = m + 1$. Ist $i > t$, so ist $\dim_k M_i = m$. Daraus folgt die zweite Aussage des Lemmas. □

Lemma 2.5. *Es seien* $D \leq P$ *,* $m \in \{1, \dots, |D|\}$ *und* $j \in \{1, \dots, (P : D)\}$ *. Dann ist*

$$\mathrm{ind}_D^P T_m = T_{(P:D)m} \quad \textit{und} \quad T_j \otimes_k T_{(P:D)m} = \bigoplus_{i=1}^{j} T_{(P:D)m} \,.$$

Beweis. Es sei $\rho = \sigma^{(P:D)}$, also $D = \langle \rho \rangle$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_D^P J^m(kD) &= kP \otimes_{kD} (\rho - 1)^m \, kD = kP(\rho - 1)^m \otimes_{kD} kD = kP(\rho - 1)^m \\ &= (\sigma - 1)^{(P:D)m} kP = J^{(P:D)m}(kP) \,.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_D^P T_m &= \mathrm{ind}_D^P(kD/J^m(kD)) = \big(\mathrm{ind}_D^P(kD)\big)/\big(\mathrm{ind}_D^P J^m(kD)\big) \\ &= kP/J^{(P:D)m}(kP) = T_{(P:D)m} \,.\end{aligned}$$

(Diese Aussage folgt auch aus Greens Unzerlegbarkeitssatz; [CR], 19.22.) Nach Lemma 2.4 ist $\mathrm{res}_D^P T_j = \bigoplus_{i=1}^j T_1$. Wegen Bemerkung 1.1, (i) ist

$$\begin{aligned}T_j \otimes_k T_{(P:D)m} &= T_j \otimes_k \mathrm{ind}_D^P T_m = \mathrm{ind}_D^P \big((\mathrm{res}_D^P T_j) \otimes_k T_m\big) \\ &= \mathrm{ind}_D^P \Big(\bigoplus_{i=1}^{j} T_m\Big) = \bigoplus_{i=1}^{j} T_{(P:D)m} \,.\end{aligned}$$

□

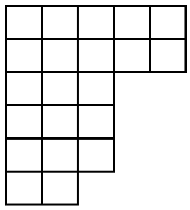
Im weiteren Verlauf dieses Unterkapitels werden Tensorprodukte bestimmt. Dazu werden die Dimensionen der direkten Summanden als Teile einer Partition einer natürlichen Zahl angesehen. Diese Methode geht auf J. Green zurück ([Gr62]). Es sei

$$M = T_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus T_{\lambda_r} \,, \quad r \in \mathbb{N} \,, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0 \,.$$

Weiterhin sei

$$b_n(M) = |\{i \mid \lambda_i \geq n\}|\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

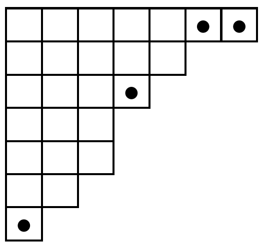
Der kP-Modul M läßt sich als *Young-Diagramm* $\Gamma(M)$ darstellen. In der ersten Reihe befinden sich λ_1 Kästchen, in der zweiten λ_2 Kästchen, usw. Die Kästchen werden lückenlos, linksbündig angeordnet. Beispielsweise für $T = T_5 \oplus T_5 \oplus T_3 \oplus T_3 \oplus T_3 \oplus T_2$ ist $\Gamma(T)$



Wie man sieht, ist $b_n(M)$ die Anzahl der Kästchen der n-ten Spalte. Man erhält $\Gamma(J^n(M))$ aus $\Gamma(M)$, indem man die ersten n Spalten von $\Gamma(M)$ streicht. Also gilt

$$b_n(M) = \dim_k(J^{n-1}(M)/(J^n(M))\,, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\,.$$

Man sagt, ein Young-Diagramm $\Gamma(N)$ eines kP-Moduls N entsteht aus $\Gamma(M)$ durch *reguläre Adjunktion von t Kästchen*, falls t Kästchen so hinzugefügt werden können, daß jede Spalte um höchstens ein Kästchen verlängert wird. Ist zum Beispiel $U = T_7 \oplus T_5 \oplus T_4 \oplus T_3 \oplus T_3 \oplus T_2 \oplus T_1$, so entsteht $\Gamma(U)$ aus $\Gamma(T)$ durch reguläre Adjunktion von 4 Kästchen.



Das Young-Diagramm $\Gamma(N)$ entsteht aus $\Gamma(M)$ durch reguläre Adjunktion von t Kästchen genau dann, wenn es t verschiedene natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_t$ gibt, so daß

$$b_n(N) - b_n(M) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in \{a_1, \ldots, a_t\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Lemma 2.6. *Es seien $j, r \in \{1, \ldots, p^d\}$ mit $j \leq r$ und*

$$T_j \otimes_k T_r \cong T_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus T_{\lambda_j}$$

mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_j > 0$.

(i) Es seien $\{b_1, \ldots, b_j\}$ und $\{c_1, \ldots, c_r\}$ Standardbasen von T_j bzw. T_r und es sei $M = T_j \otimes_k T_r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} J^{n-1}(M)/J^n(M) &= \bigoplus_{i=1}^{b_n(M)} k\{(\sigma-1)^{n-1}(b_i \otimes c_1) + J^n(M)\} \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{b_n(M)} J^{n-1}(T_{\lambda_i})/J^n(T_{\lambda_i}) \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

(ii) Gilt $p \nmid \binom{r+j-2}{j-1}$, so ist $\lambda_1 = j + r - 1$.

(iii) Es ist

$$T_{p^d-j} \otimes_k T_r \cong T_{p^d-\lambda_1} \oplus \cdots \oplus T_{p^d-\lambda_j} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r-j} T_{p^d}.$$

Beweis. Eine k-Basis von M ist $\mathcal{B} = \{b_n \otimes c_m \mid 1 \leq n \leq j, 1 \leq m \leq r\}$. Die Basisvektoren seien zuerst nach n und dann nach m geordnet. Es wird der k-Endomorphismus

$$\psi : M \longrightarrow M, \quad x \longmapsto (\sigma - 1)x$$

betrachtet. Nach Satz 2.1 ist $\psi(M) = J(M)$. Nach Lemma 2.3 ist

$$\psi(b_n \otimes c_m) = \begin{cases} b_n \otimes c_{m+1} + b_{n+1} \otimes c_m + b_{n+1} \otimes c_{m+1} & \text{falls } n \neq j \text{ und } m \neq r \\ b_j \otimes c_{m+1} & \text{falls } n = j \text{ und } m \neq r \\ b_{n+1} \otimes c_r & \text{falls } n \neq j \text{ und } m = r \\ 0 & \text{falls } n = j \text{ und } m = r \end{cases}.$$

Da M eine Summe von j unzerlegbaren Summanden ist (siehe Lemma 2.2), ist $\dim_k J(M) = \dim_k M - j = j(r-1)$. Die $j(r-1)$ Vektoren $\psi(b_n \otimes c_m)$ mit $n \in \{1, \ldots, j\}$ und $m \in \{1, \ldots, r-1\}$ sind linear unabhängig. Also spannen sie $\psi(M) = J(M)$ auf. Diese Basis von $J(M)$ kann durch $\{b_1 \otimes c_1, b_2 \otimes c_1, \ldots, b_j \otimes c_1\}$ zu einer Basis von M ergänzt werden. Also gilt $M/J(M) = \bigoplus_{i=1}^{j} k\{b_i \otimes c_1 + J(M)\}$ als k-Vektorraum. Da der kP-Modul $M/J(M)$ halbeinfach ist, ist dies auch eine Zerlegung in kP-Moduln.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Der Vektorraum $J^n(M)/J^{n+1}(M)$ wird von $\{\psi^n(b_i \otimes c_1) + J^{n+1}(M) \mid 1 \leq i \leq j\}$ erzeugt. Folgende Aussage soll gezeigt werden: Gilt $\psi^n(b_i \otimes c_1) \in J^{n+1}(M)$ für ein $i \leq j$, so gilt $\psi^n(b_t \otimes c_1) \in J^{n+1}(M)$ für alle $i \leq t \leq j$. Dazu wird die Abbildungsmatrix $A \in k^{jr \times jr}$ von ψ bzgl. $\mathcal{B}$ betrachtet. Diese Matrix ist eine untere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonale. Die erste Diagonale unterhalb der Hauptdiagonale besteht aus Nullen und Einsen. An den Stellen $r, 2r, 3r, \ldots$ stehen Nullen, alle anderen Einträge sind Einsen. Die r-te Diagonale unterhalb der Hauptdiagonale enthält nur Einsen, die $(r+1)$-te Diagonale ist wie die erste unterhalb der Hauptdiagonale aufgebaut. Alle anderen Einträge der Matrix sind Null. Beispielsweise hat A für $j = 3$ und $r = 4$ folgendes Aussehen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Streicht man die ersten r Spalten und r Zeilen, so ist die Stuktur der so gewonnenen Matrix gleich der von A. Dies hat folgende Konsequenz. Es sei

$$V : k^{jr} \longrightarrow k^{jr}, \quad (x_{(1,1)}, x_{(1,2)}, \ldots, x_{(j,r)}) \longmapsto (0, \ldots, 0, x_{(1,1)}, x_{(1,2)}, \ldots, x_{((j-1),r)})$$

die Abbildung, welche die Koordinaten eines Vektors aus k^{jr} um r Stellen nach rechts verschiebt. Gilt $Ax = y$ für $x, y \in k^{jr}$, dann gilt auch $A\,Vx = Vy$. Folglich ist $AVx = VAx$ für alle $x \in k^{jr}$. Es sei $\{e_{n,m}\}$ die Standardbasis von k^{jr}. Dann entspricht $e_{i,1}$ dem Element $b_i \otimes c_1$ aus M und es gilt $Ve_{i,1} = e_{i+1,1}$ für $i < j$. Ist nun $A^n e_{i,1} = A^{n+1} y$ für ein $i < j$ und $y \in k^{jr}$, so ist $A^n e_{i+1,1} = A^n\,Ve_{i,1} = VA^n e_{i,1} = V\,A^{n+1} y = A^{n+1} Vy$. Gilt also $\psi^n(b_i \otimes c_1) \in J^{n+1}(M)$, so ist $\psi^n(b_{i+1} \otimes c_1) \in J^{n+1}(M)$. Somit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\mathcal{E} = \{\psi^n(b_i \otimes c_1) + J^{n+1}(M) \mid 1 \leq i \leq n_0\}$ ein Erzeugersystem von $J^n(M)/J^{n+1}(M)$ mit $0 \notin \mathcal{E}$ ist. Außerdem ist $b_i \otimes c_1 \in J^{n+1}(M)$ für $n_0 < i \leq j$.

Nun wird gezeigt, daß $\mathcal{E}$ linear unabhängig ist. Dazu sei $\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i\,\psi^n(b_i \otimes c_1) \equiv 0 \pmod{J^{n+1}(M)}$ mit $\lambda_i \in k$. Indem man V als Element aus $\mathrm{End}_k(M)$ auffaßt, erhält man $\lambda_1\,\psi^n(b_{n_0} \otimes c_1) \equiv V^{n_0-1}\big(\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i\,\psi^n(b_i \otimes c_1)\big) \equiv V^{n_0-1}\,0 = 0 \pmod{J^{n+1}(M)}$. Da $\psi^n(b_{n_0} \otimes c_1) \notin J^{n+1}(M)$ ist, ist $\lambda_1 = 0$. Deswegen ist $\lambda_2\,\psi^n(b_{n_0} \otimes c_1) =$

$\lambda_1\,\psi^n(b_{n_0-1}\otimes c_1)+\lambda_2\,\psi^n(b_{n_0}\otimes c_1)\equiv V^{n_0-2}\big(\sum_{i=1}^{n_0}\lambda_i\,\psi^n(b_i\otimes c_1)\big)\equiv 0 \pmod{J^{n+1}(M)}$, also $\lambda_2=0$. Man fährt auf diese Weise fort und erhält $\lambda_i=0$ für $1\le i\le n_0$. Da $\dim_k J^n(M)/J^{n+1}(M)=b_{n+1}(M)$ ist (siehe Seite 29), ist $n_0=b_{n+1}(M)$.

Der letzte Abschnitt zeigt

$$J^{n-1}(M)/J^n(M)=\bigoplus_{i=1}^{b_n(M)} k\{(\sigma-1)^{n-1}(b_i\otimes c_1)+J^n(M)\}\,,\quad n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}\,.$$

Für einen direkten Summanden T_{λ_i} von M gilt $J^{n-1}(T_{\lambda_i})/J^n(T_{\lambda_i})\neq 0$ genau dann, wenn $\lambda_i\ge n$ ist. Genau dann ist $i\le b_n(M)$. Also ist auch

$$J^{n-1}(M)/J^n(M)\cong\bigoplus_{i=1}^{j} J^{n-1}(T_{\lambda_i})/J^n(T_{\lambda_i})=\bigoplus_{i=1}^{b_n(M)} J^{n-1}(T_{\lambda_i})/J^n(T_{\lambda_i})\,.$$

Um (ii) zu beweisen, wird das kleinste $n\in\mathbb{N}$ mit $\psi^n(b_1\otimes c_1)=0$ bestimmt. Denn es gilt $\psi^n(b_1\otimes c_1)=0$ genau dann, wenn $\psi^n(M)=0$ ist. Genau dann ist $J^n(T_{\lambda_1})=0$. Es sei also $n\in\mathbb{N}$ mit $(\sigma-1)^n(b_1\otimes c_1)=0$. Nach (2.3) ist genau dann

$$\binom{n}{t}b_{1+t}\otimes(\sigma-1)^{n-t}\sigma^t c_1=0$$

für alle $t\in\{0,\dots,j-1\}$. Nach (2.2) ist genau dann

$$\binom{n}{t}b_{1+t}\otimes(\sigma-1)^{n-t}c_1=0 \tag{2.4}$$

für alle $t\in\{0,\dots,j-1\}$.

Ist $n=r+j-1$, so ist $n-t\ge r$ und somit $(\sigma-1)^{n-t}c_1=0$ für alle $t\in\{0,\dots,j-1\}$. Also ist (2.4) erfüllt für alle $t\in\{0,\dots,j-1\}$. Ist $n=r+j-2$, so ist nach Voraussetzung $\binom{n}{j-1}\neq 0$ und $(\sigma-1)^{n-(j-1)}c_1=(\sigma-1)^{r-1}c_1\neq 0$.

Zum Beweis von (iii) wird die kurze exakte Sequenz

$$0\longrightarrow T_{p^d-j}\longrightarrow T_{p^d}\longrightarrow T_j\longrightarrow 0$$

betrachtet. Da $T_{p^d}\otimes_k T_r=\bigoplus_{i=1}^r T_{p^d}$ ist (Lemma 2.5), ist

$$0\longrightarrow T_{p^d-j}\otimes_k T_r\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{r}T_{p^d}\longrightarrow T_j\otimes_k T_r\longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Außerdem ist

$$0\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{j}T_{p^d-\lambda_r}\oplus\bigoplus_{i=j+1}^{r}T_{p^d}\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{r}T_{p^d}\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{j}T_{\lambda_i}\oplus\bigoplus_{i=j+1}^{r}T_0\longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Aus Schanuels Lemma (siehe [CR], 2.24) folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.7. *Es seien M und N zwei kP-Moduln. Existiert eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow T_j \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0\,,$$

so entsteht $\Gamma(M)$ aus $\Gamma(N)$ durch reguläre Adjunktion von j Kästchen.

Beweis. Ohne Einschränkung sei T_j ein Untermodul von M. Die kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow T_j \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Epimorphismus

$$\psi := (\sigma-1)^{n-1}M/(\sigma-1)^n M \longrightarrow (\sigma-1)^{n-1}N/(\sigma-1)^n N$$

mit $\ker\psi = (L + (\sigma-1)^n M)/(\sigma-1)^n M)$, wobei $L = ((\sigma-1)^{n-1}M) \cap T_j$ ist. Da T_j unzerlegbar ist, ist auch L unzerlegbar. Also ist L zyklisch. Dann ist auch $\ker\psi$ zyklisch und deshalb unzerlegbar. Da $(\sigma-1)\ker\psi = 0$ ist, ist $\ker\psi$ null- oder eindimensional. Somit ist $b_n(N) - b_n(M) \in \{0,1\}$, d.h. $\Gamma(M)$ entsteht aus $\Gamma(N)$ durch reguläre Adjunktion von $\dim_k N - \dim_k M = \dim_k T_j = j$ Kästchen. $\square$

Lemma 2.8. *Es sei $d \geq 2$ und $q = p^{d-1}$ und $m \in \{1,\ldots,p-2\}$. Dann werden $\binom{(m+1)q}{q}$ und $\binom{p^d-(m-1)q-2}{q}$ nicht von p geteilt.*

Beweis. Es sei $v_p : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ die p-adische Exponentialbewertung. Für $a \in \mathbb{N}$ gilt also $a = p^{v_p(a)}b$ mit $b \in \mathbb{N}$ und $p \nmid b$. Außerdem ist $v_p(a!) = \sum_{i=1}^{\infty}\lfloor \frac{a}{p^i}\rfloor$, wobei $\lfloor x\rfloor$ die größte natürliche Zahl kleiner gleich x bezeichnet.

Es sei $n \in \{1,\ldots,p\}$ und $z = \binom{nq}{q}$. Dann ist $v_p(z) = v_p\big((nq)!\big) - v_p\big(((n-1)q)!\big) - v_p\big(q!\big)$ und

$$\begin{aligned} v_p\big((nq)!\big) &= \sum_{i=1}^{d-1} \tfrac{nq}{p^i} + \Big\lfloor \tfrac{nq}{p^d}\Big\rfloor = \sum_{i=1}^{d-1} \tfrac{(n-1)q}{p^i} + \sum_{i=1}^{d-1} \tfrac{q}{p^i} + \Big\lfloor \tfrac{nq}{p^d}\Big\rfloor \\ &= v_p\big(((n-1)q)!\big) + v_p\big(q!\big) + \Big\lfloor \tfrac{nq}{p^d}\Big\rfloor\,. \end{aligned}$$

Also ist $v_p(z) = 0$ falls $n \neq p$ und $v_p(z) = 1$ falls $n = p$ ist. Insbesondere gilt $p \nmid \binom{(m+1)q}{q}$.

Es gilt $p^d - (m-1)q - 2 = q(p-m+1) - 2$ und

$$\tbinom{q(p-m+1)-2}{q} = \tbinom{q(p-m+1)}{q} \cdot \tfrac{p-m}{p-m+1} \cdot \tfrac{q(p-m)-1}{q(p-m+1)-1}\,.$$

Es ist $v_p\big(\frac{q(p-m)-1}{q(p-m+1)-1}\big) = 0$. Ist $m \neq 1$, so ist $v_p\big(\binom{q(p-m+1)}{q}\big) = 0$ und $v_p\big(\frac{p-m}{p-m+1}\big) = 0$. Ist $m = 1$, dann ist $v_p\big(\binom{q(p-m+1)}{q}\big) = 1$ und $v_p\big(\frac{p-m}{p-m+1}\big) = -1$. In beiden Fällen ist $v_p\big(\binom{q(p-m+1)-2}{q}\big) = 0$. Also gilt auch $p \nmid \binom{p^d-(m-1)q-2}{q}$. $\square$

Satz 2.9. *Es sei $d \geq 1$ und $q = p^{d-1}$. Dann gilt:*

(i) $T_{mq} \otimes_k T_{q+1} = T_{(m+1)q} \oplus \bigoplus_{i=1}^{q-1} T_{mq} \oplus T_{(m-1)q}$ *für* $1 \leq m < p$

(ii) $T_{mq+1} \otimes_k T_j = T_{mq+j} \oplus \bigoplus_{i=1}^{j-1} T_{mq}$ *für* $0 \leq m < p$ *und* $1 \leq j \leq q$

(iii) $T_{mq+1} \otimes_k T_{q+1} = T_{(m+1)q+1} \oplus T_{(m+1)q-1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{q-2} T_{mq} \oplus T_{(m-1)q+1}$ *für* $1 \leq m \leq p-2$ *und* $q \neq 1$

Beweis. Wegen Lemma 2.6, (ii) ist $T_2 \otimes_k T_m = T_{m+1} + T_{m-1}$ für $1 \leq m < p$. Nach Lemma 2.5 und Lemma 2.4 gilt $\mathrm{ind}_{P_1}^{P} T_m = T_{mq}$ und $\mathrm{res}_{P_1}^{P} T_{q+1} = T_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{q-1} T_1$. Wie im Beweis von Lemma 2.5 läßt sich nun mit Hilfe von Bemerkung 1.1 Teil (i) des Satzes zeigen.

Da

$$0 \longrightarrow T_j \otimes_k T_1 \longrightarrow T_j \otimes_k T_{mq+1} \longrightarrow T_j \otimes_k T_{mq} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz ist, entsteht $\Gamma(T_j \otimes_k T_{mq+1})$ aus $\Gamma(T_j \otimes_k T_{mq})$ durch reguläre Adjunktion von j Kästchen (Lemma 2.7). Da $T_{mq} \otimes_k T_j = \bigoplus_{i=1}^{j} T_{mq}$ gilt (Lemma 2.5) und $T_j \otimes_k T_{mq+1}$ genau j unzerlegbare direkte Summanden besitzt, werden bei der Adjunktion der ersten Reihe j Kästchen hinzugefügt. Damit ist Teil (ii) gezeigt.

Nach Lemma 2.8 werden $\binom{(m+1)q}{q}$ und $\binom{p^d-(m-1)q-2}{q}$ nicht von p geteilt. Nach Lemma 2.6, (ii), ist $T_{(mq+1)+(q+1)-1} = T_{(m+1)q+1}$ ein direkter Summand maximaler Dimension von $M := T_{mq+1} \otimes_k T_{q+1}$ und $T_{(p^d-(mq+1))+(q+1)-1} = T_{p^d-((m-1)q+1)}$ ein direkter Summand von $T_{p^d-(mq+1)} \otimes_k T_{q+1}$. Nach Lemma 2.6, (iii), ist dann auch $T_{(m-1)q+1}$ ein direkter Summand von M . Ferner ensteht $\Gamma(M)$ aus $\Gamma(T_{mq} \otimes_k T_{q+1})$ durch reguläre Adjunktion von $q+1$ Kästchen (Lemma 2.7). Da $T_{mq} \otimes_k T_{q+1} = T_{(m+1)q} \oplus (\bigoplus_{i=1}^{q-1} T_{mq}) \oplus T_{(m-1)q}$ ist (Teil (i) des Satzes), werden bei der Adjunktion die erste Reihe (welche $T_{(m+1)q}$ repräsentiert) um ein Kästchen und die letzte Reihe (welche $T_{(m-1)q}$ repräsentiert) um ein Kästchen ergänzt. Die restlichen $q-1$ Kästchen werden notwendigerweise der zweiten Reihe (welche T_{mq} repräsentiert) hinzugefügt. □

Korollar 2.10. *Es sei $d \geq 1$ und $q = p^{d-1}$. Dann gilt:*

(i) $T_{(p-1)q+1} \otimes_k T_{q+1} = T_{(p-2)q+1} \oplus T_{p^d} \oplus T_{p^d} \oplus \bigoplus_{i=1}^{q-2} T_{(p-1)q}$

(ii) $T_{mq-1} \otimes_k T_{q+1} = T_{(m-1)q-1} \oplus T_{(m-1)q+1} \oplus T_{(m+1)q-1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{q-2} T_{mq}$ *für* $2 \leq m \leq p-1$ *und* $q \neq 1$

(iii) $T_{mq-1} \otimes_k T_j = T_{mq-j} \oplus \bigoplus_{i=1}^{j-1} T_{mq}$ *für* $1 \leq m \leq p$, $1 \leq j \leq q$

Beweis. Man erhält die Formeln, indem man Lemma 2.6, (iii), auf Satz 2.9 anwendet. □

Mit den Formeln von Satz 2.9 und Korollar 2.10 werden im Kapitel 3 die Spezies von $A(kP)$ berechnet. Weitere Tensorproduktformeln befinden sich in [Gr62]. Aufbauend auf [Gr62] bestimmte J. C. Renaud einen Algorithmus zur Zerlegung des Tensorprodukts beliebiger kP-Moduln (siehe [Ren]). Zuvor veröffentlichte bereits B. Srinivasan einen anderen Algorithmus (siehe [Sr]). Eine explizite Formel gibt J.H. Lindsey II in [Lin] an. Die eben erwähnten Arbeiten zeigen, daß die Zerlegung eines Tensorprodukts im allgemeinen Fall enormen rechnerischen Aufwand erfordert und die Formeln nicht einfach zu beschreiben sind. Für $d = 1$ findet man Formeln in [Fei], Kap. VII.2.

Bemerkung 2.11. *Es sei* $T_j \otimes_k T_r = T_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus T_{\lambda_j}$ *mit* $j \leq r$ *und* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_j$ *eine der Relationen von Satz 2.9. Dann gilt* $\lambda_i = j + r + 1 - 2i$ *, falls* λ_i *nicht von* p *geteilt wird.*

2.2 Die unzerlegbaren kG-Moduln

Da P zyklisch ist, gilt

$$N_G(P) = N_G(P_d) \leq N_G(P_{d-1}) \leq \cdots \leq N_G(P_1) \leq N_G(P_0) = G$$

und

$$P \leq C_G(P) = C_G(P_d) \leq C_G(P_{d-1}) \leq \cdots \leq C_G(P_1) \leq C_G(P_0) = G\,.$$

Mit Hilfe der Greenkorrespondenz werden die unzerlegbaren kG-Moduln konstruiert. Dazu sei M ein unzerlegbarer kG-Modul. Da die Vertizes von M eine Konjugationsklasse von p-Untergruppen bilden und je zwei p-Untergruppen gleicher Mächtigkeit von G konjugiert sind, ist $\{{}^gD \mid g \in G\}$ für ein $D \leq P$ die Menge der Vertizes von M . Für die Mengen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ von Seite 14 gilt dann mit $H = N_G(D)$

$$\mathcal{X} = \{Q \leq G \mid Q = D \cap {}^gD \text{ für ein } g \in G \backslash N_G(D)\} \subset \{Q \leq G \mid Q < D\}$$

und

$$\mathcal{Y} = \{Q \leq G \mid Q = N_G(D) \cap {}^gD \text{ für ein } g \in G \backslash N_G(D)\} \subset \{Q \leq G \mid Q < D\}\,.$$

Der Modul $\mathrm{res}^G_{N_G(D)} M$ ist also ein relativ D-projektiver $kN_G(D)$-Modul, welcher in genau einen unzerlegbaren direkten Summanden mit Vertex D und in unzerlegbare Summanden mit Vertex kleiner D zerfällt. Die unzerlegbaren relativ D-projektiven $kN_G(D)$-Moduln werden im folgenden studiert.

Eine Untergruppe $D \leq P$ wird fixiert. So ist $D = \langle \rho \rangle$ mit $\rho = \sigma^{(P:D)} \in P$. Ferner sei $N := N_G(D)$ und $\{F_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{IBr}(N)\}$ ein Vertretersystem der einfachen

kN-Moduln. Dann ist

$$kN \cong \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N)} \bigoplus_{i=1}^{\varphi(1)} U_\varphi\,, \quad U_\varphi/J(U_\varphi) \cong F_\varphi\,, \tag{2.5}$$

eine Zerlegung von kN in unzerlegbare projektive kN-Moduln.

Lemma 2.12. *Die Menge $I := (\rho-1)\,kN = kN\,(\rho-1)$ ist ein Ideal von kN. Es gilt $(\rho-1)\,kN \subset J(kN)$. Gleichheit herrscht genau dann, wenn $D = P$ ist.*

Beweis. Da $J(kD) = (\rho-1)\,kD = kD\,(\rho-1)$ und D ein Normalteiler von N ist, ist $kN\,J(kD) = J(kD)\,kN$. Also ist $I = (\rho-1)\,kN = J(kD)\,kN$ ein nilpotentes Ideal von kN. Somit gilt $I \subset J(kN)$.

Zum Beweis der anderen Aussage betrachte den kanonischen Algebrenepimorphismus $\varphi : kN \longrightarrow k(N/D)$. Da $\ker\varphi = (\rho-1)\,kN = I$ ist, ist $J(kN)/I = J(kN/I) \cong J(k(N/D))$. Da kN artinsch ist, gilt $J(k(N/D)) = 0$ genau dann, wenn $k(N/D)$ halbeinfach ist. Die Gruppenalgebra $k(N/D)$ ist genau dann halbeinfach, wenn $(N : D)$ nicht von p geteilt wird. Da $N_G(P) \le N_G(D) = N$ gilt, ist P eine p-Sylowgruppe von N. Also ist p genau dann kein Teiler von $(N : D)$, wenn $D = P$ ist. □

Lemma 2.13. *Es sei $Q \le D$. Dann gilt $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(N) \cong \mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(N/Q)$ als Ringe.*

Beweis. Es sei $\overline{N} = N/Q$ und M ein einfacher kN-Modul. Da $Q \trianglelefteq N$ ist, ist $\mathrm{res}_Q^N M$ halbeinfach nach Cliffords Theorie (siehe Bem. 1.6). Da k der einzige einfache kQ-Modul ist, operiert Q trivial auf $\mathrm{res}_Q^N M$ und somit auch trivial auf M. Also stimmen einfache kN-Moduln und einfache $k(N/Q)$-Moduln überein. Deshalb sind $\overline{\varphi} : \overline{N}_{p'} \longrightarrow \mathcal{O}$, $gQ \longmapsto \varphi(g)$ mit $\varphi \in \mathrm{IBr}(N)$ die irreduziblen Brauercharaktere von $\overline{N}$ und die Abbildung $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(N) \longrightarrow \mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(\overline{N})$, $\varphi \longmapsto \overline{\varphi}$ ist ein Ringisomorphismus. □

Zwischen $\mathrm{IBr}(N)$ und $\mathrm{IBr}(N/D)$ wird hier nicht unterschieden. Je nach Kontext wird entweder die eine oder die andere Menge zugrunde gelegt. Der Beweis des nächsten Satzes orientiert sich an [CR], Prop 20.11.

Satz 2.14. *Es sei $D \le P$, F_φ und U_φ mit $\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)$ wie oben definiert. Die Moduln*

$$V_{\varphi,j} := U_\varphi/(\rho-1)^j U_\varphi\,, \quad \varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)\,, \quad 1 \le j \le |D|$$

bilden ein Repräsentantensystem der unzerlegbaren relativ D-projektiven $kN_G(D)$-Moduln. Es gilt

$$V_{\varphi,j}/J(V_{\varphi,j}) = F_\varphi\,, \quad \mathrm{res}_D^{N_G(D)} V_{\varphi,j} = \bigoplus_{i=1}^{a_\varphi} T_j\,, \quad \mathrm{ind}_D^{N_G(D)} T_j = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)} \bigoplus_{i=1}^{\varphi(1)} V_{\varphi,j}$$

mit $a_\varphi = \frac{\dim_k U_\varphi}{|D|}$.

Beweis. Es sei $N := N_G(D)$, $\overline{N} = N/D$, $\varphi \in \mathrm{IBr}(\overline{N})$, $j \in \{1, \ldots, |D|\}$, $U := U_\varphi$, $V := V_{\varphi,j}$ und $F := F_\varphi$. Da $(\rho-1)^j kN$ ein Ideal von kN ist (siehe Lemma 2.12), ist $(\rho-1)^j U$ ein kN-Modul. Da $U/J(U)$ einfach ist, ist $J(U)$ ein maximaler Untermodul von U . Folglich ist $J(U)/(\rho-1)^j U = J(V)$ ein maximaler Untermodul von $U/(\rho-1)^j U = V$. Also ist $V/J(V)$ einfach, d.h V ist unzerlegbar (siehe Bem. 1.13). Da $V/J(V) \cong U/J(U) = F$ ist, gilt $V \cong V_{\varphi',j'}$ mit $\varphi' \in \mathrm{IBr}(N)$ und $j' \in \{1, \ldots, |D|\}$ höchstens dann, wenn $\varphi = \varphi'$ ist.

Es gilt

$$\mathrm{res}^N_D V = \mathrm{res}^N_D U / \mathrm{res}^N_D (\rho-1)^j U = \mathrm{res}^N_D U/(\rho-1)^j \,\mathrm{res}^N_D U \,.$$

Da U projektiv ist, ist auch $\mathrm{res}^N_D U$ projektiv. Da direkte Summanden von projektiven Moduln projektiv sind und kD der einzige unzerlegbare projektive kD-Modul ist, ist $\mathrm{res}^N_D U$ eine direkte Summe von $a := \frac{\dim_k U}{|D|}$ Kopien von kD . Also gilt

$$\mathrm{res}^N_D V = \bigoplus_{i=1}^{a} kD / \bigoplus_{i=1}^{a} (\rho-1)^j kD = \bigoplus_{i=1}^{a} kD/(\rho-1)^j kD = \bigoplus_{i=1}^{a} T_j \,.$$

Somit ist $\dim_k V = j \cdot a$ und $V \cong V_{\varphi,j'}$ impliziert $j = j'$. Die $V_{\varphi,j}$ sind also paarweise nicht isomorph.

Schließlich sei M ein unzerlegbarer relativ D-projektiver kN-Modul. Somit ist M ein direkter Summand von $\mathrm{ind}^N_D(W)$, wobei W ein unzerlegbarer kD-Modul ist. Also ist $W = T_n$ für ein $n \in \{1, \ldots, |D|\}$ (Satz 2.1). Dann ist

$$\mathrm{ind}^N_D(W) = \mathrm{ind}^N_D(kD/J^n(kD)) = \mathrm{ind}^N_D(kD)/\,\mathrm{ind}^N_D(J^n(kD)) = kN/kN\,J^n(kD)\,.$$

Da $kN\,J^n(kD) = kN\,(\rho-1)^n = (\rho-1)^n kN$ ist (Satz 2.1 und Lemma 2.12), gilt

$$\mathrm{ind}^N_D(W) = kN/(\rho-1)^n kN = \bigoplus_{\psi \in \mathrm{IBr}(N/D)} \bigoplus_{i=1}^{\psi(1)} U_\psi/(\rho-1)^n U_\psi = \bigoplus_{\psi \in \mathrm{IBr}(N/D)} \bigoplus_{i=1}^{\psi(1)} V_{\psi,n}\,.$$

Also ist M isomorph zu einem der Moduln $V_{\psi,n}$. Außerdem ist V ein direkter Summand von $\mathrm{ind}^N_D \,\mathrm{res}^N_D V$, d.h. alle $V_{\varphi,j}$ sind relativ D-projektiv. □

Ein unzerlegbarer relativ D-projektiver $kN_G(D)$-Modul M ist also durch den einfachen Modul $M/J(M)$ und die natürliche Zahl n mit $(\rho-1)^{n-1}M \neq 0$ und $(\rho-1)^n M = 0$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Korollar 2.15. *Es sei* $Q \le D \le P$, $\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)$ *und* $m \in \{1, \ldots, |Q|\}$. *Dann ist* $V_{\varphi,(D:Q)m}$ *relativ* Q*-projektiv. Gilt* $p \nmid m$, *so ist* Q *ein Vertex und der* kQ*-Modul* T_m *eine Quelle von* $V_{\varphi,(D:Q)m}$.

Beweis. Es sei $V = V_{\varphi,(D:Q)m}$. Nach Lemma 2.5 ist $T_{(D:Q)m} = \mathrm{ind}_Q^D T_m$. Nach Satz 2.14 ist V ein direkter Summand von $\mathrm{ind}_D^N T_{(D:Q)m}$. Folglich ist V ein direkter Summand von $\mathrm{ind}_Q^N T_m$. Also ist V relativ Q-projektiv. Wird m nicht von p geteilt, dann kann der kQ-Modul T_m nicht von einem Modul einer echten Untergruppe von Q induziert werden. Deshalb ist Q ein Vertex und T_m eine Quelle von V. □

Weiterhin sei $N = N_G(D)$. Ein bestimmter eindimensionaler kN-Modul spielt eine besondere Rolle. Da $D \trianglelefteq N$ ist, gibt es zu jedem $g \in N$ ein $r \in \mathbb{N}$ mit ${}^g\rho = \rho^r$. Ist $n := |N|$, so ist $\rho = {}^{(g^n)}\rho = \rho^{r^n}$, also $r^n \equiv 1 \pmod{|D|}$, woraus $r^n \equiv 1 \pmod{p}$ folgt. Also ist $\overline{r} := r + \mathfrak{m}$ eine n-te Einheitswurzel in $\mathcal{O}/\mathfrak{m} = k$. Nach dem Satz von Fermat ist $\overline{r}$ auch eine $(p-1)$-te Einheitswurzel in k. Durch $g \cdot m := \overline{r}m$ wird ein eindimensionaler k-Vektorraum M zu einem kN-Modul. Der zugehörige Brauercharakter wird mit α bezeichnet. Es ist also $M \cong F_\alpha$ und $\mathrm{ord}(\alpha)$ ist ein Teiler von $p-1$.

Lemma 2.16. *Es sei* $\varphi \in \mathrm{IBr}(N/D)$, $j \in \{1,\dots,|D|\}$ *und* α *wie oben definiert. Dann gilt* $\varphi\alpha \in \mathrm{IBr}(N)$ *und* $V_{\varphi,j} \otimes_k F_\alpha = V_{\varphi\alpha,j}$.

Beweis. Es sei $L := F_\varphi \otimes_k F_\alpha$ und U ein echter Untermodul von L. Dann gilt $U \otimes_k F_{\alpha^{-1}} \subsetneqq L \otimes_k F_{\alpha^{-1}} = F_\varphi$. Somit ist $U \otimes_k F_{\alpha^{-1}} = 0$. Also ist $U = 0$, d.h. $\varphi\alpha \in \mathrm{IBr}(N/D)$.

Es sei $V := V_{\varphi,j}$ und $M := V \otimes_k F_\alpha$. Der Modul M ist unzerlegbar, da sonst $V \cong M \otimes F_{\alpha^{-1}}$ zerlegbar wäre. Da $\mathrm{res}_D^N M = \mathrm{res}_D^N V$ gilt, ist $M = V_{\psi,j}$ für ein $\psi \in \mathrm{IBr}(N)$. Da

$$M/(J(V) \otimes_k F_\alpha) = (V \otimes_k F_\alpha)/(J(V) \otimes_k F_\alpha) = V/J(V) \otimes_k F_\alpha = F_\varphi \otimes_k F_\alpha = F_{\varphi\alpha}$$

gilt, ist $J(V) \otimes_k F_\alpha$ ein maximaler Untermodul von M, also $J(M) = J(V) \otimes_k F_\alpha$. Somit ist $M/J(M) = F_{\varphi\alpha}$, also $M = V_{\varphi\alpha,j}$. □

Lemma 2.17. *Es sei* $D \leq P$ *mit* $D \neq 1$ *und* $e = \mathrm{ord}(\alpha)$.

(i) Es sei $1 < Q \leq D$. *Dann ist*

$$C_G(D) = N_G(D) \cap C_G(Q).$$

(ii) Es ist $N_G(D)/C_G(D) = \langle \tau C_G(D) \rangle$ *für ein* $\tau \in N_G(P)$. *Außerdem gilt*

$$N_G(D)/C_G(D) \cong N_G(P)/C_G(P)$$

und $e = (N_G(P) : C_G(P))$. *Es gibt ein* $\chi \in \mathrm{Irr}(N_G(D)/C_G(D))$ *mit* $\mathrm{ord}(\chi) = e$, *so daß*

$$\alpha = \mathrm{inf}_{N_G(D)/C_G(D)}^{N_G(D)} \chi$$

ist.

(iii) Die Gruppe P besitzt ein normales Komplement H in $C_G(D)$. Desweiteren ist H ein Normalteiler in $N_G(D)$ und es gilt

$$N_G(D)/H = PH/H \rtimes \langle \tau H \rangle \cong P \rtimes (N_G(D)/C_G(D)).$$

Beweis. Es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $|D| = p^m$. Zunächst sei $p > 2$. Offensichtlich ist $C_G(D) \leq N_G(D) \cap C_G(Q)$. Die Abbildung

$$\psi : N_G(D) \longrightarrow \mathrm{Aut}(D), \quad g \longmapsto (\rho \longmapsto g\rho g^{-1})$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\ker \psi = C_G(D)$. Da $p > 2$ ist, ist $\mathrm{Aut}(D) \cong (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^* = \mathbb{Z}/p^{m-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Deshalb ist $\mathrm{Aut}(D)$ zyklisch, also $\mathrm{Aut}(D) = \langle \phi \rangle$ für ein $\phi \in \mathrm{Aut}(D)$. Dann ist $\mathrm{Aut}(P_1) = \langle \phi^{p^{m-1}} \mid P_1 \rangle \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Da P in $C_G(D)$ enthalten ist, ist $N_G(D)/C_G(D)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Insbesondere ist $N_G(D)/C_G(D)$ zyklisch.

Es sei $g \in N_G(D) \cap C_G(Q)$. Da $g \in N_G(D)$ ist, ist $g^r \in C_G(D)$ für eine natürliche Zahl r, welche $p-1$ teilt. Es gilt also $\psi(g) \in \langle \phi^{p^{m-1}} \rangle$. Da $g \in C_G(Q)$ ist, ist $g \in C_G(P_1)$. Da $\langle \phi^{p^{m-1}} \rangle \cong \mathrm{Aut}(P_1)$ ist, ist $\psi(g) = \mathrm{id}$, also $g \in \ker \psi = C_G(D)$. Hiermit ist (i) für $p > 2$ gezeigt.

Ist $p = 2$, so ist $\mathrm{Aut}(D) \cong (\mathbb{Z}/2^{|D|}\mathbb{Z})^*$ eine 2-Gruppe und $N_G(D)/C_G(D)$ eine $2'$-Gruppe. Da $N_G(D)/C_G(D)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(D)$ ist, gilt $N_G(D)/C_G(D) = 1$, also $N_G(D) = C_G(D)$. Somit gelten (i) und (ii) für $p = 2$.

Setze $\overline{G} = N_G(D)$ und $\overline{H} = C_G(D)$. Dann ist $\overline{H} \trianglelefteq \overline{G}$, P eine p-Sylowgruppe von $\overline{H}$ und $N_{\overline{G}}(P) = N_G(P) \cap \overline{G} = N_G(P)$. Wegen des Frattini-Arguments (siehe [Rob], 5.2.14) ist $N_G(D) = \overline{G} = N_{\overline{G}}(P)\,\overline{H} = N_G(P)\,C_G(D)$. Nach Teil (i) gilt $C_G(P) = N_G(P) \cap C_G(D)$. Also ist

$$\begin{aligned} N_G(P)/C_G(P) &= N_G(P)/N_G(P) \cap C_G(D) \cong N_G(P)\,C_G(D)/C_G(D) \\ &= N_G(D)/C_G(D). \end{aligned}$$

Es sei $U = N_G(D)/C_G(D)$ und $z = |U|$. Da die Gruppe U zyklisch und $N_G(D) = N_G(P)C_G(D)$ ist, ist $U = \langle \tau C_G(D) \rangle$ für ein $\tau \in N_G(P)$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^n = 1$. Da $\ker \alpha = C_G(D)$ ist, ist genau dann $\alpha(\tau^n) = \alpha(\tau)^n = 1$. Nach Definition von α ist genau dann ${}^{\tau^n}\rho = \rho$. Das ist äquivalent zu $\tau^n \in C_G(D)$. Genau dann ist n ein Vielfaches von z. Also ist $\mathrm{ord}(\alpha) = n$. Damit ist (ii) bewiesen.

Es sei $\overline{G} = C_G(D)$. Dann ist $\overline{G} = C_{\overline{G}}(D) = N_{\overline{G}}(D)$. Nach dem zweiten Teil des Lemmas gilt $N_{\overline{G}}(P)/C_{\overline{G}}(P) \cong N_{\overline{G}}(D)/C_{\overline{G}}(D) = 1$. Also ist $N_{\overline{G}}(P) = C_{\overline{G}}(P)$. Wegen des Satzes von Burnside ([Rob], 10.1.8) besitzt die p-Sylowgruppe P ein normales Komplement H in $C_G(D)$. Es gilt also $C_G(D) = H \rtimes P$. Dann ist $C_G(D) = {}^{\tau}C_G(D) = {}^{\tau}H \rtimes {}^{\tau}P = {}^{\tau}H \rtimes P$ und ${}^{\tau}H$ ist ein normales Komplement von P. Da normale Komplemente einer p-Sylowgruppe eindeutig sind, ist ${}^{\tau}H = H$. Also ist H ein Normalteiler von $N_G(D)$.

Wegen $N_G(D) = C_G(D)\langle\tau\rangle = PH\langle\tau\rangle$ ist $N_G(D)/H = (PH/H)\,\langle\tau H\rangle$. Da $\tau \in N_G(P)$ ist, ist PH/H ein Normalteiler von $N_G(D)/H$. Desweiteren ist $PH/H \cong P$ und $\langle\tau H\rangle \cong N_G(D)/C_G(D)$. Daraus folgt die zweite Aussage von (iii). □

Die Beweisidee von Teil (i) ist [Fei], Lemma VII. 1.1 entnommen. Das letzte Lemma zeigt, daß der Brauercharakter α unabhängig von D ist. Deshalb entscheidet der Kontext, zu welcher Gruppe $N_G(D)$ der Charakter α gehört. Für eine Untergruppe $U \leq G$ mit $D \leq U \leq N_G(D)$ wird die Einschränkung $\alpha|U$ auch mit α bezeichnet.

Man erhält $kN_G(D)$-Moduln durch Inflation von $k(N_G(D)/H)$-Moduln. Deswegen werden die unzerlegbaren $k(N_G(D)/H)$-Moduln genauer untersucht. Es sei $\overline{N_G(D)} = N_G(D)/H$, $\overline{P} = PH/H$ und für ein $x \in N_G(D)$ sei $\overline{x} = xH \in \overline{N_G(D)}$. Außerdem sei $\tau \in N_G(P)$ wie im Lemma 2.17 definiert. Also ist $\overline{N_G(D)} = \overline{P} \rtimes \langle\overline{\tau}\rangle$. Da $\overline{P}$ isomorph zu P ist, können die im Kapitel 2.1 eingeführten kP-Moduln als $k\overline{P}$-Moduln aufgefaßt werden. Man erhält einen $k\overline{N_G(D)}$-Modul M_j indem man auf dem $k\overline{P}$-Modul T_j zusätzlich $\langle\overline{\tau}\rangle$ operieren läßt:

$$\overline{\tau} \cdot \big(\overline{\sigma} + (\overline{\sigma} - 1)^j k\overline{P}\big) := {}^{\overline{\tau}}\overline{\sigma} + (\overline{\sigma} - 1)^j k\overline{P}\,.$$

Satz 2.18. *Es seien $\overline{N_G(D)}$ und M_j wie oben definiert. Es gilt $\mathrm{IBr}(\overline{N_G(D)}) = \mathrm{Irr}(\langle\overline{\tau}\rangle) = \{1, \alpha, \ldots, \alpha^{e-1}\}$. Die unzerlegbaren $k\overline{N_G(D)}$-Moduln werden von*

$$M_{\alpha^i,j} := F_{\alpha^i} \otimes_k M_j\,, \quad 1 \leq j \leq |P|\,, \quad 0 \leq i < e$$

repräsentiert. Sie sind einreihig. Die Kompositionsreihe von M_j ist

$$M_j = M_{1,j} \supset M_{\alpha,j-1} \supset \cdots \supset M_{\alpha^{j-1},1} \supset 0\,. \tag{2.6}$$

Die Kompositionsfaktoren sind (von oben nach unten)

$$F_1\,, F_\alpha\,, \ldots, F_{\alpha^{j-1}}\,. \tag{2.7}$$

Beweis. Da im Beweis auf die Gruppe H kein Bezug genommen wird, kann zur Vereinfachung der Schreibweise ohne Beschränkung der Allgemeinheit $H = 1$ angenommen werden. Dann ist $N_G(D) = P \rtimes \langle\tau\rangle$ und $\mathrm{ord}(\tau) = \mathrm{ord}(\alpha) = e$. Es sei $N = N_G(D)$. Da P eine p-Sylowgruppe von N ist, sind die unzerlegbaren kN-Moduln relativ P-projektiv. Da P normal in N ist, kann Satz 2.14 mit $D = P$ angewendet werden. So bilden $V_{\alpha^i,j}$ mit $1 \leq i \leq e$ und $1 \leq j \leq |P|$ ein Vertretersystem der unzerlegbaren kN-Moduln.

Es sei $a \in \mathbb{N}$ mit ${}^\tau\sigma = \sigma^a$. Für $x \in F_\alpha$ gilt also $\tau x = ax$. Außerdem sei $j \in \{1, \ldots, p^d\}$ und $\{b_1, \ldots, b_j\}$ die Standardbasis (2.1) von T_j. Der kP-Modul T_j wird jetzt als kN-Modul aufgefaßt. Es sei $i \in \{1, \ldots, j\}$. Dann ist

$${}^\tau(\sigma - 1)^{i-1} = (\sigma^a - 1)^{i-1} = (1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^{a-1})^{i-1}(\sigma - 1)^{i-1}\,. \tag{2.8}$$

Also gilt

$$^{\tau}b_i = (1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{a-1})^{i-1} b_i\,. \tag{2.9}$$

Insbesondere ist $^{\tau}b_1 = b_1$. Nach Definition der Standardbasis ist $J^{n-1}(T_j)/J^n(T_j) = kP(b_n + J^n(T_j))$ für $1 \le n \le j$. Da P trivial auf einfachen kN-Moduln operiert, ist $^{\tau}b_n + J^n(T_j) = a^{n-1}b_n + J^n(T_j)$. Also ist $J^{n-1}(T_j)/J^n(T_j) \cong F_{\alpha^{n-1}}$. Damit ist gezeigt, daß $T_j \cong V_{1,j}$ als kN-Modul gilt. Somit ist $M_j \cong V_{1,j}$ und nach Lemma 2.16 gilt $M_{\alpha^i,j} = F_{\alpha^i} \otimes_k M_j \cong F_{\alpha^i} \otimes_k V_{1,j} = V_{\alpha^i,j}$. Ferner sind (2.7) die Kompositionsfaktoren, und (2.6) ist die Kompositionsreihe von $M_{1,j}$. □

Korollar 2.19. *Es sei $Q \le P$ und $H_Q = \overline{Q} \rtimes \langle\overline{\tau}\rangle \le \overline{N_G(D)}$. Außerdem seien $j, r \in \{1, \ldots, |P|\}$ mit $j \le r$. Gilt $T_j \otimes_k T_r = T_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus T_{\lambda_j}$ mit $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_j$, so ist*

$$M_{1,j} \otimes_k M_{1,r} = M_{1,\lambda_1} \oplus M_{\alpha,\lambda_2} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha^{j-1},\lambda_j}\,.$$

Ist $\mathrm{res}^P_Q T_j = T_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus T_{\lambda_n}$ mit $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$, dann ist

$$\mathrm{res}^{\overline{N_G(D)}}_{H_Q} M_{1,j} = M_{1,\lambda_1} \oplus M_{\alpha,\lambda_2} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha^{n-1},\lambda_n}\,.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $H = 1$. Es sei $N = N_G(D)$ und $M = T_j \otimes_k T_r$. Indem man den kP-Modul M als kN-Modul auffaßt, bekommt man eine Zerlegung $M = M_{\chi_1,\lambda_1} \oplus \cdots \oplus M_{\chi_j,\lambda_j}$ in unzerlegbare kN-Moduln, wobei die $\chi_i \in \mathrm{Irr}(\langle\tau\rangle) = \{1, \alpha, \ldots, \alpha^{e-1}\}$ sind. Es sei $a \in \mathbb{N}$ mit $^{\tau}\sigma = \sigma^a$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, j\}$ und $\{b_1, \ldots, b_j\}$ sowie $\{c_1, \ldots, c_r\}$ seien Standardbasen von T_j bzw. T_r . Aus (2.8) und (2.9) und der Tatsache, daß $(\sigma-1)^{n-1} \equiv (\sigma-1)^{n-1}\sigma \pmod{J^n(M)}$ ist, folgt

$$\begin{aligned} {}^{\tau}\big((\sigma-1)^{n-1}(b_i \otimes c_1) + J^n(M)\big) &= {}^{\tau}(\sigma-1)^{n-1}({}^{\tau}b_i \otimes {}^{\tau}c_1) + J^n(M) \\ &= a^{n-1+i-1}\big((\sigma-1)^{n-1}(b_i \otimes c_1) + J^n(M)\big)\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$k\{(\sigma-1)^{n-1}(b_i \otimes c_1) + J^n(M)\} = F_{\alpha^{n-1+i-1}}\,.$$

Nach Lemma 2.6 ist dann

$$\bigoplus_{i=1}^{b_n(M)} J^{n-1}(M_{\chi_i,\lambda_i})/J^n(M_{\chi_i,\lambda_i}) = \bigoplus_{i=1}^{b_n(M)} F_{\alpha^{n-1+i-1}}\,.$$

Wegen (2.7) gilt

$$\bigoplus_{i=1}^{b_n(M)} M_{\chi_i,\lambda_i}/J(M_{\chi_i,\lambda_i}) = \bigoplus_{i=1}^{b_n(M)} F_{\alpha^{i-1}}\,.$$

Es seien $m_1, m_2, \ldots$ die Vielfachheiten der Dimensionen der direkten Summanden von M . Genauer formuliert ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{m_1} > \lambda_{m_1+1}$, $\lambda_{m_1+1} = \cdots =$

$\lambda_{m_1+m_2} > \lambda_{m_1+m_2+1}$, usw. Wenn man das Young-Diagramm $\Gamma(M)$ betrachtet, sieht man, daß $m_1 = b_{n_1}(M)$, $m_1 + m_2 = b_{n_2}(M)$ usw. für natürliche Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ gilt. Somit ist

$$\bigoplus_{i=1}^{m_1} M_{\chi_i,\lambda_i}/J(M_{\chi_i,\lambda_i}) = \bigoplus_{i=1}^{m_1} F_{\alpha^{i-1}}\,, \qquad \bigoplus_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} M_{\chi_i,\lambda_i}/J(M_{\chi_i,\lambda_i}) = \bigoplus_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} F_{\alpha^{i-1}}$$

usw. Also können die χ_i so gewählt werden, daß $\chi_i = \alpha^{i-1}$ gilt. Damit ist die erste Aussage des Korollars bewiesen. Die zweite Aussage folgt aus Lemma 2.4. □

Durch Inflation der relativ D-projektiven $k(N_G(D)/H)$-Moduln erhält man relativ D-projektive $kN_G(D)$-Moduln:

Korollar 2.20. *Es sei $D \leq P$ mit $D \neq 1$. Es gilt*

$$V_{\alpha^i,j} = \inf_{N_G(D)/H}^{N_G(D)} M_{\alpha^i,j(P:D)}\,, \quad 0 \leq i \leq e-1\,, \quad 1 \leq j \leq |D|$$

und $\dim_k V_{\alpha^i,j} = (P:D)j$.

Aus dem letzten Satz und seinen Korollaren folgt, daß die wesentlichen Informationen über die $kN_G(D)$-Moduln $V_{\alpha^i,j}$ von den (relativ D-projektiven) kP-Moduln und vom Charakter α bereitgestellt werden. Satz 2.18 betrachtet einen Spezialfall des Falls $D = P$. Der allgemeine Fall $D = P$ wird im nächsten Korollar untersucht.

Nach dem Satz von Schur-Zassenhaus (siehe [Rob], 9.1.2) ist $N_G(P) = P \rtimes C$ mit einer bis auf Konjugation eindeutig bestimmten p'-Gruppe C . Da $N_G(P)/P \cong C$ ist, ist $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(N_G(P)) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(C)$. Aufgrund der Vereinbarung auf Seite 36 wird zwischen den Brauercharakteren von $N_G(P)$ und den gewöhnlichen Charakteren von C nicht unterschieden. Für die Gruppe $H \leq C_G(P)$ aus Lemma 2.17 gilt $C_G(P) = P \times H$.

Korollar 2.21. *Es sei $N = N_G(P) = P \rtimes C$, $\{F_\varphi \,|\, \varphi \in \mathrm{Irr}(C)\}$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen der einfachen kN-Moduln und $\{U_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Irr}(C)\}$ ein Vertetersystem der unzerlegbaren projektiven kN-Moduln mit $U_\varphi/J(U_\varphi) = F_\varphi$.*

(i) Die unzerlegbaren kN-Moduln werden repräsentiert von

$$W_{\varphi,j} := U_\varphi/J^j(U_\varphi) = U_\varphi/(\sigma-1)^j U_\varphi = (\inf_{N/H}^N M_j) \otimes_k F_\varphi$$

mit $\varphi \in \mathrm{Irr}(C)$ und $1 \leq j \leq p^d$.

(ii) Es gilt

$$\dim_k W_{\varphi,j} = j \cdot \varphi(1)\,, \quad \mathrm{res}_P^N W_{\varphi,j} = \bigoplus_{i=1}^{\varphi(1)} T_j\,, \quad \mathrm{ind}_P^N T_j = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Irr}(C)} \bigoplus_{i=1}^{\varphi(1)} W_{\varphi,j}\,.$$

(iii) *Es gilt* $F_\varphi = W_{\varphi,1}$ *für* $\varphi \in \mathrm{Irr}(C)$. *Insbesondere haben einfache* kN*-Moduln Vertex* P .

(iv) *Die unzerlegbaren* kN*-Moduln sind einreihig. Die Kompositionsfaktoren von* $W_{\varphi,j}$ *sind (von oben nach unten)*

$$F_\varphi\,, F_{\varphi\alpha}\,, F_{\varphi\alpha^2}, \ldots, F_{\varphi\alpha^{j-1}}\,.$$

(v) *Es seien* $j, r \in \{1, \ldots, |P|\}$ *mit* $j \leq r$. *Gilt* $T_j \otimes_k T_r = T_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus T_{\lambda_j}$ *mit* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_j$ *, so ist*

$$W_{\varphi,j} \otimes_k W_{1,r} = W_{\varphi,\lambda_1} \oplus W_{\varphi\alpha,\lambda_2} \oplus \cdots \oplus W_{\varphi\alpha^{j-1},\lambda_j} \tag{2.10}$$

mit $\varphi \in \mathrm{Irr}(c)$.

Beweis. Nach Satz 2.14 sind $W_{\varphi,j} = U_\varphi / J^j(U_\varphi)$ die unzerlegbaren kN-Moduln. Insbesondere ist $F_\varphi = W_{\varphi,1}$ und $U_\varphi = W_{\varphi,p^d}$. Nach Korollar 2.20 ist $W_{1,j} = \mathrm{inf}_{N/H}^N M_j$. Es gilt

$$J(W_{1,j} \otimes_k F_\varphi) = (\sigma - 1)(W_{1,j} \otimes_k F_\varphi) = ((\sigma - 1)W_{1,j}) \otimes_k F_\varphi = J(W_{1,j}) \otimes_k F_\varphi\,.$$

Also gilt

$$(W_{1,j} \otimes_k F_\varphi)/J(W_{1,j} \otimes_k F_\varphi) = (W_{1,j}/J(W_{1,j})) \otimes_k F_\varphi = F_\varphi\,.$$

Damit ist $W_{\varphi,j} = W_{1,j} \otimes_k F_\varphi$ gezeigt. Aus Korollar 2.20 und Satz 2.14 folgt dann (ii). Aus Satz 2.18 folgt (iii) und aus Korollar 2.19 und Korollar 2.20 schließlich (iv) . □

Beispiel 2.22. Ist N abelsch, so ist $N = P \times C$, $\alpha = 1$ und $|\,\mathrm{Irr}(C)| = |C|$. Es gibt genau $|N|$ verschiedene unzerlegbare kN-Moduln. Der Modul $W_{\varphi,j}$ ist j-dimensional und hat die eindimensionalen Kompositionsfaktoren $F_\varphi, F_\varphi, \ldots, F_\varphi$.

Beispiel 2.23. Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade, $n = p^d m$ mit $p \nmid m$ und es sei $N = D_{2n}$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$. Dann ist $N = P \rtimes C$ mit $C = D_{2m} = \langle a, b\rangle$, $a^m = b^2 = 1$ und $ba = a^{m-1}b$. Die Charaktertafel von C ist

	1	a^r $(1 \leq r \leq \frac{m-1}{2})$	b
1	1	1	1
α	1	1	-1
χ_t $(1 \leq t \leq \frac{m-1}{2})$	2	$\zeta^{tr} + \zeta^{-tr}$	0

Dabei ist ζ eine primitive m-te Einheitswurzel. Deweiteren ist $kN = U_1 \oplus U_\alpha \oplus \bigoplus_{t=1}^{\frac{m-1}{2}} (U_{\chi_t} \oplus U_{\chi_t})$ eine Zerlegung von kN in unzerlegbare direkte Summanden. Die Moduln U_1 und U_α sind p^d-dimensional, U_χ mit $\chi = \chi_t$ ist $2p^d$-dimensional. Die Kompositionsfaktoren von U_1 sind $F_1, F_\alpha, F_1 \ldots, F_1$, die Kompositionsfaktoren von U_χ sind $F_\chi, F_\chi, \ldots, F_\chi$.

Die p-hypoelementaren Untergruppen von G sind ein wichtiges Beispiel für Gruppen mit normaler p-Sylowgruppe (siehe Seite 17). Ist $D \leq P$ und $c \in N_G(D)_{p'}$, so ist $\langle D, c\rangle$ eine p-hypoelementare Gruppe. Die Gruppe $\langle D, c\rangle$ ist metazyklisch, d.h. alle Sylowuntergruppen von $\langle D, c\rangle$ sind zyklisch. Es gilt $\mathrm{IBr}(\langle D, c\rangle) = \mathrm{Irr}(\langle c\rangle) = \langle \chi\rangle$, wobei χ ein eindimensionaler Charakter mit $\mathrm{ord}(\chi) = \mathrm{ord}(c)$ ist. Ist $D \neq 1$, so ist $\alpha = \chi^{\frac{\mathrm{ord}(c)}{e'}}$ mit $e' = (\langle D, c\rangle : C_{\langle D,c\rangle}(D))$. Eine Darstellung von $\langle D, c\rangle$ ist

$$\langle D, c\rangle = \langle x, y \mid x^{|D|} = 1 = y^{\mathrm{ord}(c)}, yxy^{-1} = x^r\rangle$$

mit $r^{e'} \equiv 1 \pmod p$. Die Ursprünge der Spezies von $A(kG)$ sind p-hypoelementare Untergruppen von G (siehe Bemerkung 1.21). Im nächsten Korollar wird deshalb die Einschränkung von $kN_G(D)$-Moduln auf $\langle D, c\rangle$ untersucht. Für $k\langle D, c\rangle$-Moduln gelten die Aussagen von Korollar 2.20. Die unzerlegbaren $k\langle D, c\rangle$-Moduln werden mit

$$Z_{\varphi,j}, \quad \varphi \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle), \quad 1 \leq j \leq |D|$$

bezeichnet. Die einfachen sowie die projektiven unzerlegbaren $k\langle D, c\rangle$-Moduln werden auch mit F_φ bzw. U_φ bezeichnet. Für eine Untergruppe H von $\langle D, c\rangle$ werden die unzerlegbaren kH-Moduln wie die $k\langle D, c\rangle$-Moduln bezeichnet.

Korollar 2.24. *Es sei $D \leq P$ und $c \in N_G(D)_{p'}$. Dann ist*

$$\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} V_{\varphi,j} = \big(\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} V_{\varphi,1}\big) \otimes_k Z_{1,j} \tag{2.11}$$

für $\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)$ und $1 \leq j \leq |D|$. Der $kN_G(D)$-Modul $V_{\varphi,j}$ und die unzerlegbaren Summanden von $\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} V_{\varphi,j}$ haben den selben Vertex. Es sei $Q \leq D$, $\chi \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle)$ und $j = (D : Q)m + t$ mit $0 \leq m \leq |Q|$ und $0 \leq t \leq (D : Q)$. Dann ist

$$\mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} Z_{\chi,j} = \bigoplus_{i=1}^{t} Z_{\chi\alpha^{i-1},m+1} \oplus \bigoplus_{i=t+1}^{(D:Q)} Z_{\chi\alpha^{i-1},m}.$$

Beweis. Es ist $\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} U_\varphi = \bigoplus_{i=1}^n U_{\chi_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\chi_i \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle)$. Wie im Beweis von Satz 2.14 zeigt man, daß $\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} V_{\varphi,r} = \bigoplus_{i=1}^n Z_{\chi_i,r}$ für alle $r \in \{1, \ldots, |D|\}$ gilt. Also ist

$$\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} V_{\varphi,j} = \bigoplus_{i=1}^{n} Z_{\chi_i,j} = \big(\bigoplus_{i=1}^{n} Z_{\chi_i,1}\big) \otimes_k Z_{1,j} = \big(\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} V_{\varphi,1}\big) \otimes_k Z_{1,j}.$$

Außerdem haben $V_{\varphi,j}$ und $Z_{\chi_i,j}$ den selben Vertex.

Es sei $H \leq \langle c\rangle$ das normale Komplement von D in $C_{\langle D,c\rangle}(D)$. Ferner seien $\overline{\langle D, c\rangle} = \langle D, c\rangle/H$ und $\overline{\langle Q, c\rangle} = \langle Q, c\rangle/H$ (siehe Lemma 2.17). Die Idee des Beweises ist, den $k\langle D, c\rangle$-Modul $Z_{1,j}$ als $k\overline{\langle D, c\rangle}$-Modul $M_{1,j}$ aufzufassen und dann Korollar 2.19 anzuwenden. Ein $k\overline{\langle Q, c\rangle}$-Modul M ist genau dann ein direkter Summand von $\overline{\mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle}} M_{1,j}$, wenn $\mathrm{inf}^{\langle Q,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} M$ ein direkter Summand von $\mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} \mathrm{inf}^{\langle Q,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} M_{1,j} = \mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} Z_{1,j}$ ist. Mit Lemma 2.4 und Korollar 2.19 bekommt man so eine Zerlegung von $\mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} Z_{1,j}$. Da $\mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} F_\chi = F_\chi$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle)$ gilt, ist das Korollar bewiesen. □

Der $kN_G(D)$-Modul $V_{\varphi,1}$ hat triviale Quelle und Vertex D. Die Formel (2.11) zeigt, daß die relativ D-projektiven $kN_G(D)$-Moduln $V_{\varphi,j}$ auf eine gewisse Weise von dem Trivial-Source-Modul $V_{\varphi,1}$ und dem kD-Modul T_j abhängen. Aus der Greenkorrespondenz, Satz 2.14 und Korollar 2.15 folgt

Satz 2.25. *Die unzerlegbaren kG-Moduln werden repräsentiert durch*

$$M_{D,\varphi,j}\,, \quad D \le P\,, \quad \varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)\,, \quad 1 \le j \le |D|\,, \quad p \nmid j\,.$$

Dabei ist $M_{D,\varphi,j}$ der Greenkorrespondent des unzerlegbaren $kN_G(D)$-Moduls $V_{\varphi,j}$.

Beispiel 2.26. Es sei $G = S_3$ und $p = 2$. Dann ist $P = \langle(12)\rangle$ eine p-Sylowgruppe von G und $N := N_G(P) = P$. Die irreduziblen Brauercharaktere von G sind

	(1)	(123)
φ_1	1	1
φ_2	2	−1

Die unzerlegbaren projektiven Brauercharaktere sind $\eta_1 = 2\varphi_1$ und $\eta_2 = \varphi_2$. Die Charaktertafel der projektiven Brauercharaktere ist

	(1)	(123)
η_1	2	2
η_2	2	−1

Somit ist $kG = U_1 \oplus U_2 \oplus U_2$ eine Zerlegung der Gruppenalgebra in unzerlegbare projektive Moduln, welche jeweils zweidimensional sind. Die unzerlegbaren kN-Moduln sind T_1 und T_2. Der Modul T_1 hat Vertex P, T_2 hat Vertex 1. Der Greenkorrespondent von T_1 wird mit M_1 bezeichnet. Es gilt $\mathrm{ind}^G_N T_1 = M_1 \oplus U_2$ und $\mathrm{res}^G_N M_1 = T_1$.

Beispiel 2.27. Es sei $G = A_5$ und $p = 5$. Dann ist $P = \langle(12345)\rangle$ eine p-Sylowgruppe von G, $N := N_G(P) = \langle(12345), (15)(24)\rangle = D_{10}$. Die irreduziblen Brauercharaktere von G sind

	1	τ	ρ
φ_1	1	1	1
φ_2	3	−1	0
φ_3	5	1	−1

Hierbei ist $\tau = (15)(24)$ und $\rho = (123)$. Die unzerlegbaren projektiven Brauercharaktere von G sind $\eta_1 = 2\,\varphi_1 + \varphi_2$, $\eta_2 = \varphi_1 + 3\,\varphi_2$ und $\eta_3 = \varphi_3$. Daraus ergibt sich die Tafel der projektiven Brauercharaktere

	1	τ	ρ
η_1	5	1	2
η_2	10	-2	1
η_3	5	1	-1

Weiterhin ist $kG = U_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{3} U_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{5} U_3$.

Die unzerlegbaren kN-Moduln sind $V_{1,j}$, $V_{\alpha,j}$ mit $1 \leq j \leq 5$ (siehe auch Beispiel 2.23). Die Moduln $V_{1,5}$ und $V_{\alpha,5}$ haben Vertex 1, alle anderen haben Vertex P. Mit $M_{1,j}$, $M_{\alpha,j}$, $1 \leq j \leq 4$, werden die entsprechenden Greenkorrespondenten bezeichnet. Mit einem Computer wurden die folgenden zwei Tabellen berechnet:

V	$\mathrm{ind}_N^G V$
$V_{1,1}$	$M_{1,1} \oplus U_3$
$V_{1,2}$	$M_{1,2} \oplus U_3$
$V_{1,3}$	$M_{1,3} \oplus U_3 \oplus U_3$
$V_{1,4}$	$M_{1,4} \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_3$
$V_{\alpha,1}$	$M_{\alpha,1}$
$V_{\alpha,2}$	$M_{\alpha,2} \oplus U_3$
$V_{\alpha,3}$	$M_{\alpha,3} \oplus U_2 \oplus U_3$
$V_{\alpha,4}$	$M_{\alpha,4} \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_3$

M	$\mathrm{res}_N^G M$
$M_{1,1}$	$V_{1,1}$
$M_{1,2}$	$V_{1,2} \oplus V_{\alpha,5}$
$M_{1,3}$	$V_{1,3} \oplus V_{\alpha,5}$
$M_{1,4}$	$V_{1,4}$
$M_{\alpha,1}$	$V_{\alpha,1} \oplus V_{\alpha,5}$
$M_{\alpha,2}$	$V_{\alpha,2} \oplus V_{\alpha,5}$
$M_{\alpha,3}$	$V_{\alpha,3}$
$M_{\alpha,4}$	$V_{\alpha,4}$

Die Brauercharaktere der unzerlegbaren kG-Moduln sind:

M	φ_M
$M_{1,1}$	φ_1
$M_{1,2}$	$\varphi_1 + 2\,\varphi_2$
$M_{1,3}$	$\varphi_2 + \varphi_3$
$M_{1,4}$	$\varphi_1 + \varphi_2$
$M_{\alpha,1}$	$2\,\varphi_2$
$M_{\alpha,2}$	$\varphi_1 + 2\,\varphi_1$
$M_{\alpha,3}$	φ_2
$M_{\alpha,4}$	$\varphi_1 + \varphi_2$

Kapitel 3

Spezies und Idempotente

Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Kapitel 2. Insbesondere sei

- $(K, \mathcal{O}, k)$ ein passendes p-modulares System
- P eine p-Sylowgruppe von G, $|P| = p^d$
- $\alpha \in \mathrm{IBr}(N_G(D))$ der auf Seite 38 definierte Charakter und $e = \mathrm{ord}(\alpha)$.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Spezies und Idempotenten von $A(kG)$. Dazu werden für jede Untergruppe $D \leq P$ die Spezies mit Vertex D berechnet. Eine Spezies s mit Vertex D hat als Ursprung eine p-hypoelementare Gruppe H mit maximaler normaler p-Untergruppe D (siehe Bemerkung 1.21). Es gilt also $s = u \circ \mathrm{res}_H^G$, wobei u eine Spezies von $A(kH)$ ist. Um die Spezies von $A(kG)$ zu berechnen, genügt es also, die Spezies von entsprechenden Greenringen $A(kH)$ zu bestimmen.

Es stellt sich im ersten Unterkapitel heraus, daß die Spezies von $A(kG)$ sich aus den Spezies des Trivial-Source-Teilrings und den Spezies von $A(kP)$ zusammensetzen (Satz 3.4). Aus diesem Grund werden diese Ringe in den zwei darauffolgenden Unterkapiteln studiert. Mit den dort gewonnenen Ergebnissen werden im letzten Unterkapitel die Spezies der Ringe $A(kH)$ und schließlich die Spezies und Idempotente von $A(kG)$ angegeben (Satz 3.31 und Satz 3.35).

3.1 Die Spezies und Idempotente von $A(kG)$ (Teil I)

Im Kapitel 2 wurden für Untergruppen von G die unzerlegbaren Moduln konstruiert. In diesem Kapitel werden die Moduln bzw. die Isomorphieklassen der Moduln als Elemente eines Greenrings aufgefaßt. Auf die im Kapitel 1 eingeführte Kennzeichnung der Isomorphieklassen durch eckige Klammern wird verzichtet. Stattdessen werden Isomorphieklassen stets mit Großbuchstaben bezeichnet.

Es sei D eine Untergruppe von P. Nach Satz 2.14 und Korollar 2.15 ist

$$a(kN_G(D), D) = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)} \bigoplus_{j=1}^{|D|} \mathbb{Z}\, V_{\varphi,j} \tag{3.1}$$

und

$$a(kN_G(D), \mathrm{Triv}, D) = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)} \bigoplus_{D' \leq D} \mathbb{Z}\, V_{\varphi,(D:D')}\,.$$

Diese beiden $\mathbb{Z}$-Moduln sind Ideale von $a(kN_G(D))$ bzw. $a(kN_G(D), \mathrm{Triv})$ (siehe Seite 18). Für $c \in N_G(D)_{p'}$ ist

$$a(k\langle D, c\rangle) = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle)} \bigoplus_{j=1}^{|D|} \mathbb{Z}\, Z_{\varphi,j}\,.$$

Es sei $D \neq 1$, H das normale Komplement von P in $C_G(D)$ (siehe Lemma 2.17) und

$$b(kN_G(D)) = \inf\nolimits_{N_G(D)/H}^{N_G(D)} a(k(N_G(D)/H))\,.$$

So ist $b(kN_G(D))$ ein Teilring von $a(kN_G(D))$ und

$$b(kN_G(D), D) = \bigoplus_{i=1}^{e} \bigoplus_{j=1}^{|D|} \mathbb{Z}\, V_{\alpha^i,j}$$

(siehe Satz 2.18 und Korollar 2.20). Die Abbildung

$$\mathrm{res} : b(kN_G(D)) \longrightarrow b(kN_G(P))$$

ist ein Ringisomorphismus. Mit $b(kN_G(D))$ wurde ein Teilring von $a(kN_G(D))$ definiert, dessen Struktur nicht von D abhängt.

Es sei $H \leq G$. Für $1 \leq D' < D$ und $(D : D') = p$ sei $a'(kH, D) = a(kH, D')$. Ist $D = 1$, so sei $a'(kH, D) = 0$. Es sei

$$\overline{a}(kH, D) = a(kH, D)/a'(kH, D)\,.$$

Für $x \in a(kH, D)$ sei $\overline{x} = x + a'(kH, D)$. Der Quotient $\overline{a}(kH, D)$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul, der von den Vertretern der unzerlegbaren kH-Moduln mit Vertex D erzeugt wird. Also ist

$$\overline{a}(kG, D) = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D))} \bigoplus_{j \in \{1,\ldots,|D|\},\, p \nmid j} \mathbb{Z}\, \overline{M_{D,\varphi,j}}$$

und

$$\overline{a}(kN_G(D), D) = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D))} \bigoplus_{j \in \{1,\ldots,|D|\},\, p \nmid j} \mathbb{Z}\, \overline{V_{\varphi,j}}$$

(siehe Satz 2.25). Nach Greens Transfer Theorem (siehe Bemerkung 1.17) ist

$$\overline{a}(kG, D) \longrightarrow \overline{a}(kN_G(D), D)\,, \quad \overline{x} \longmapsto \overline{\operatorname{res} x}$$

ein Ringisomorphismus, welcher zwei in Greenkorrespondenz stehende Elemente aufeinander abbildet. Der Greenkorrespondent von $V \in a(kN_G(D), D)$ mit Vertex D wird mit $\operatorname{green}^G V$ bezeichnet. Wie bei $a(kG)$ und $A(kG)$ werden die mit $\mathbb{C}$ tensorierten $\mathbb{Z}$-Moduln mit Großbuchstaben bezeichnet.

Lemma 3.1. *Es sei $D \leq P$. Folgende Zahlen sind gleich:*

(1) die Anzahl der unzerlegbaren kG-Moduln mit Vertex D

(2) die Anzahl der unzerlegbaren $kN_G(D)$-Moduln mit Vertex D

(3) $\dim_{\mathbb{C}} \overline{A}(kG, D)$

(4) $\dim_{\mathbb{C}} \overline{A}(kN_G(D), D)$

(5) die Anzahl der Spezies von $A(kG)$ mit Vertex D

(6) die Anzahl der Spezies von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D

Beweis. Es sei $I = A(kG, D)$ und $J = A'(kG, D)$. Dann ist $J \subset I$, $I = \mathbb{C}\, e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\, e_n$ mit primitiven Idempotenten $e_1, \ldots, e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung ist $J = \mathbb{C}\, e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\, e_m$ mit $m < n$. Weiterhin seien $s_1, \ldots, s_n$ die zu den primitiven Idempotenten gehörenden Spezies von $A(kG)$. Nach Bemerkung 1.19 hat eine Spezies s von $A(kG)$ genau dann Vertex D, wenn $s(I) \neq 0$ und $s(J) = 0$ ist. Genau dann ist $s \in \{s_{m+1}, \ldots, s_n\}$. Damit ist die Gleichheit von (1), (3) und (5) gezeigt. Ebenfalls sind (2), (4) und (6) gleich. Die Greenkorrespondenz liefert schließlich die Gleichheit von (1) und (2). ☐

Im Beweis von Lemma 3.1 wurde wieder ein Zusammenhang von Spezies, Idempotenten und Vertex hergestellt. Der Begriff Vertex soll auch für Idempotente verwendet werden. Ein primitives Idempotent e hat *Vertex D*, falls die Spezies s mit $s(e) = 1$ Vertex D hat.

Satz 3.2. *Es sei $D \leq P$. Dann gilt*

$$\operatorname{Sp}\big(A(kG), D\big) = \big\{ s \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)} \mid s \in \operatorname{Sp}\big(A(kN_G(D)), D\big) \big\}\,.$$

Für $s, s' \in \operatorname{Sp}\big(A(kN_G(D)), D\big)$ ist $s \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)} = s' \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)}$ genau dann, wenn $s = s'$ ist.

Beweis. Es sei s eine Spezies von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D, $\tilde{s} = s \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)}$, $I := A(kG, D)$ und $J := A'(kG, D)$. Dann ist $\operatorname{res}^G_{N_G(D)} J \subset A'(kN_G(D), D)$, also $\tilde{s}(J) = s(\operatorname{res}^G_{N_G(D)} J) = 0$. Es sei $V \in A(kN_G(D), D)$ mit Vertex D und $s(V) \neq 0$, und es sei $M \in I$ der Greenkorrespondent von V. Da s Vertex D hat, ist dann $\tilde{s}(M) = s(V) \neq 0$. Daher ist $\tilde{s}(I) \neq 0$. Wegen $\tilde{s}(I) \neq 0$ und $\tilde{s}(J) = 0$ hat $\tilde{s}$ Vertex D.

Es sei s' eine weitere Spezies von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D. Ist $s \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)} = s' \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)}$, so ist nach dem eben gezeigten $s(V) = s'(V)$ für alle $kN_G(D)$-Moduln V mit Vertex D. Da auch $s(V) = 0 = s'(V)$ gilt für alle $kN_G(D)$-Moduln V, deren Vertizes echte Untergruppen von D sind, ist $s(x) = s'(x)$ für alle $x \in A(kN_G(D), D)$. Also stimmen s und s' auf dem Ideal $A(kN_G(D), D)$ überein. Somit ist $s = s'$. Deswegen gibt es $\left|\operatorname{Sp}\big(A(kN_G(D)), D\big)\right|$ Spezies von I der Form $s \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)}$. Da $|\operatorname{Sp}(I)| = \left|\operatorname{Sp}\big(A(kN_G(D)), D\big)\right|$ ist (Lemma 3.1), sind dies alle Spezies von I. □

Aus dem Beweis des Satzes folgt ein Kriterium zur Entscheidung, ob zwei Spezies mit gleichem Vertex identisch sind:

Bemerkung 3.3. *Es sei $D \leq P$ und $\tilde{s}, \tilde{t}$ seien Spezies von $A(kG)$ mit Vertex D. Es gilt $\tilde{s} = \tilde{t}$ genau dann, wenn $\tilde{s}(M) = \tilde{t}(M)$ für alle kG-Moduln M mit Vertex D gilt.*

Die Aussagen von Lemma 3.1, Satz 3.2 und Bemerkung 3.3 lassen sich auf den Trivial-Source-Ring $A(kG, \mathrm{Triv})$ übertragen. Es gilt also

$$\operatorname{Sp}\big(A(kG, \mathrm{Triv}), D\big) = \left\{ s \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)} \mid s \in \operatorname{Sp}\big(A(kN_G(D), \mathrm{Triv}), D\big) \right\}. \tag{3.2}$$

Außerdem ist $s \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)} = s' \circ \operatorname{res}^G_{N_G(D)}$ genau dann, wenn $s = s'$ ist. Einen alternativen Beweis von Satz 3.2 bekommt man mit Greens Transfer Theorem. Die Spezies von $\overline{A}(kN_G(D))$ sind

$$\overline{s} : \overline{A}(kN_G(D)) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \overline{x} \longmapsto s(x).$$

Dabei durchläuft s die Menge der Spezies von $A(N_G(D))$ mit Vertex D. Also sind

$$\tilde{s} : A(kG, D) \longrightarrow \overline{A}(kG, D) \longrightarrow \overline{A}(kN_G(D)) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \overline{x} \longmapsto (s \circ \operatorname{res})(x)$$

die Spezies des Ideals $A(kG, D)$ mit Vertex D. Da die Spezies eines Ideals sich eindeutig auf den gesamten Ring fortsetzen lassen (siehe Seite 18), genügt es, die Spezies eines Ideals zu berechnen.

Satz 3.2 reduziert das Berechnen der Spezies von $A(kG)$ auf das Berechnen der Spezies von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D, wobei D alle Untergruppen von P durchläuft. Zusätzlich liefert der Satz eine auf der Greenkorrespondenz basierende

Bijektion zwischen Spezies mit Vertex D von $A(kG)$ und $A(kN_G(D))$. Die Spezies von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D haben als Ursprung eine p-hypoelementare Gruppe in der D maximaler p-Normalteiler ist (siehe Bemerkung 1.21). Solche Gruppen sind genau

$$\langle D, c\rangle\,, \quad c \in N_G(D)_{p'}\,.$$

Für eine Spezies s mit Vertex D gilt also $s = u \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}$, wobei u eine Spezies von $\langle D, c\rangle$ ist. Kennt man die Spezies von $\langle D, c\rangle$ für alle $c \in N_G(D)_{p'}$, so bleiben noch die Fragen, welche Spezies von $A(k\langle D, c\rangle)$ Ursprung $\langle D, c\rangle$ haben und ob für zwei Spezies $u \in \mathrm{Sp}\bigl(A(k\langle D, c\rangle)\bigr)$, $u' \in \mathrm{Sp}\bigl(A(k\langle D, c'\rangle)\bigr)$ die Gleichheit $u \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} = u' \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c'\rangle}$ gilt. Zur Beantwortung dieser Fragen kann man die Spezies auf eine Unteralgebra einschränken, deren Spezies man schon kennt. Aus diesem Grund wird im nächsten Unterkapitel der Trivial-Source-Ring untersucht. Eine weitere Verbindung zum Trivial-Source-Ring stellt der folgende Satz her.

Satz 3.4. *Es sei $D \le P$, $c \in N_G(D)_{p'}$, u eine Spezies von $A(k\langle D, c\rangle)$ und $s = u \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}$. Dann ist*

$$s(V_{\varphi,j}) = s(V_{\varphi,1}) \cdot u(Z_{1,j})$$

mit $\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)$ und $1 \le j \le |D|$.

Beweis. Aus Korollar 2.24 folgt

$$\begin{aligned} s(V_{\varphi,j}) &= \bigl(u \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}\bigr)(V_{\varphi,j}) = u\bigl((\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} V_{\varphi,1})\, Z_{1,j}\bigr) \\ &= \bigl(u \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}\bigr)(V_{\varphi,1}) \cdot u(Z_{1,j}) = s(V_{\varphi,1}) \cdot u(Z_{1,j}) \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)$ und $j \in \{1, \dots, |D|\}$. ☐

Der $kN_G(D)$-Modul $V_{\varphi,1}$ hat triviale Quelle und Vertex D. Satz 3.4 zeigt, daß die Spezies von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D sich aus den Spezies von $A(kN_G(D), \mathrm{Triv}, D)$ und den Spezies von $A(k\langle D, c\rangle)$ zusammensetzen. Die Tensorproduktformel (2.10) legt die Vermutung nahe, daß die Spezies von $A(k\langle D, c\rangle)$ von den Spezies von $A(kD)$ und dem Brauercharakter α abhängen. In Kapitel 3.4 wird diese Vermutung bestätigt.

3.2 Die Spezies und Idempotente von $A(kG, \mathrm{Triv})$

Der erste Satz dieses Unterkapitels gibt Auskunft über die Spezies und Idempotente des Ideals $A(kN_G(D), \mathrm{Triv}, D)$. Es werden nicht nur die Spezies mit Vertex D sondern alle Spezies angegeben. Wendet man den Satz auf $D = P$ an, so erhält man alle Spezies und Idempotente des Rings $A(kN_G(P), \mathrm{Triv})$.

Satz 3.5. *Es sei* $D \leq P$ *und* $N := N_G(D)$. *Die Spezies von* $A(kN, \mathrm{Triv}, D)$ *sind*

$$s_{Q,c} : A(kN, \mathrm{Triv}, D) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad M \longmapsto \begin{cases} \varphi_M(c) & \textit{falls Vertex von } M \geq Q \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases},$$

wobei $Q \leq D$, $c \in N_{p'}$, M *ein unzerlegbarer Modul und* φ_M *der Brauercharakter von* M *ist. Es gilt* $s_{Q,c} = s_{Q',c'}$ *genau dann, wenn* $Q = Q'$ *und* $c =_N c'$ *ist. Setze*

$$\lambda(Q, c) := \frac{1}{|C_{N/Q}(cQ)|} \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N)} \varphi(c^{-1}) V_{\varphi,(D:Q)}\,, \quad c \in N_{p'}\,, \quad 1 \leq Q \leq D\,.$$

Die primitiven Idempotente von $A(kN, \mathrm{Triv}, D)$ *sind*

$$e_{1,c} = \lambda(1, c)\,, \quad e_{Q,c} = \lambda(Q, c) - \lambda(Q', c)$$

mit $1 \leq Q' < Q \leq D$, $(Q : Q') = p$ *und* $c \in N_{p'}$.

Beweis. Es seien R und R' Untergruppen von D mit $R \leq R'$ und es sei $\mathcal{R}$ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $R' \backslash N / R$. Weiterhin seien $M, M' \in A(kN, \mathrm{Triv}, D)$ mit Vertex R bzw. R' . Da R und R' Normalteiler von N sind, ist ${}^gR' \cap R = R$ für alle $g \in N$. Wegen Bemerkung 1.1, (i) und (ii), ist $M \otimes_k M'$ ein direkter Summand von

$$(\mathrm{ind}_R^N T_1) \otimes_k (\mathrm{ind}_{R'}^N T_1) = \bigoplus_{g \in \mathcal{R}} \mathrm{ind}_{{}^gR' \cap R}^N T_1 = \bigoplus_{g \in \mathcal{R}} \mathrm{ind}_R^N T_1\,.$$

Nach Bemerkung 1.12, (iii), (d), haben alle direkten Summanden von $M \otimes_k M'$ Vertex R . Somit gilt $s_{Q,c}(M \cdot M') = \varphi_{M \otimes_k M'}(c) = \varphi_M(c)\, \varphi_{M'}(c) = s_{Q,c}(M)\, s_{Q,c}(M')$ falls $R \geq Q$ und $s_{Q,c}(M \cdot M') = 0 = s_{Q,c}(M) = s_{Q,c}(M)\, s_{Q,c}(M')$ falls $R < Q$ ist. Damit ist gezeigt, daß $s_{Q,c}$ eine Spezies ist.

Offensichtlich ist $s_{Q,c} \neq s_{Q',c'}$ falls $Q \neq Q'$ und $s_{Q,c} = s_{Q,c'}$ falls $c =_N c'$ ist. Da $M := V_{\varphi,(D:R)}$ Vertex R hat und R ein Normalteiler von N ist, kann M als projektiver $k(N/R)$-Modul aufgefaßt werden (Bemerkung 1.12). Indem man auch die irreduziblen Brauercharaktere von N als irreduzible Brauercharaktere von N/R auffaßt (siehe Seite 36), erhält man mit der zweiten Orthogonalitätsrelation für Brauercharaktere (Bem. 1.8,(iii))

$$s_{Q,c}(\lambda(R, c')) = \begin{cases} 1 & \text{falls } R \geq Q \text{ und } c =_N c' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Also ist $s_{Q,c} = s_{Q,c'}$ genau dann, wenn $c =_N c'$ ist und es ist gezeigt, daß $e_{R,c'}$ ein Idempotent mit $s_{Q,c}(e_{R,c'}) = \delta_{QR}\delta_{cc'}$ ist.

Da die Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere von N mit der Anzahl der p'-Konjugationsklassen von N übereinstimmt (Bem. 1.7), sind dies alle Spezies. Ferner sind die zugehörigen Idempotente primitiv. □

Offensichtlich hat eine Spezies $s_{Q,c}$ von $A(kN_G(D), \mathrm{Triv})$ Vertex Q. Eine Spezies s von $A(kG)$ heißt *Brauerspezies*, falls s Vertex 1 hat. Gegebenenfalls ist s die (einzige) Fortsetzung einer Spezies von $A(kG, 1)$. Da $A(kG, 1) = A(AkG, \mathrm{Triv}, 1)$ ist, ist s die Fortsetzung von $s_{1,c} \in A(kG, \mathrm{Triv}, 1)$ für ein $c \in G_{p'}$. Also ist

$$s : A(kG) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad M \longmapsto \varphi_M(c).$$

Korollar 3.6. *Es sei $D = P$, $c \in N_G(P)_{p'}$, $\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(P))$ und $Q, Q' \leq P$. Dann ist*

$$s_{Q,c}(W_{\varphi,(P:Q')}) = \begin{cases} (P : Q')\,\varphi(c) & \textit{falls } Q' \geq Q \textit{ und } c \in C_G(P) \\ \varphi(c) & \textit{falls } Q' \geq Q \textit{ und } c \notin C_G(P) \\ 0 & \textit{falls } Q' < Q \end{cases}.$$

Beweis. Es sei $\eta = \sum_{i=1}^{(P:Q')} \alpha^i$. Nach Korollar 2.21 ist η der Brauercharakter von $W_{1,j}$ und $\eta\varphi$ der Brauercharakter von $W_{\varphi,j}$. Da $\alpha(c)$ eine e-te Einheitswurzel ist und e ein Teiler von $p-1$, gilt $\eta(c) = (P : Q')$ falls $\alpha(c) = 1$ ist und $\eta(c) = 1$ falls $\alpha(c) \neq 1$ ist. Es ist $\alpha(c) = 1$ genau dann, wenn $c \in C_G(P)$ ist. Aus Satz 3.5 folgt nun die Behauptung. □

Beispiel 3.7. Für $G = C_{p^2}$ ergibt sich die Speziestafel

	T_1	T_p	T_{p^2}
s_0	1	p	p^2
s_1	1	p	0
s_2	1	0	0

Die primitiven Idempotente sind

$$e_0 := \tfrac{1}{p^2} T_{p^2}, \quad e_1 := \tfrac{1}{p} T_p - \tfrac{1}{p^2} T_{p^2}, \quad e_2 := 1 - \tfrac{1}{p} T_p.$$

Beispiel 3.8. Ist $p \neq 2$ und $G = D_{2p}$, also $G = P \rtimes C$ mit $C = C_2 = \langle \tau \rangle$, so ist

	F_1	F_α	U_1	U_α
$s_{1,1}$	1	1	p	p
$s_{1,\tau}$	1	-1	1	-1
$s_{P,1}$	1	1	0	0
$s_{P,\tau}$	1	-1	0	0

die Speziestafel von $A(kG, \mathrm{Triv})$. Die primitiven Idempotente sind

$$\begin{aligned} e_{1,1} &= \tfrac{1}{2p}(U_1 + U_\alpha), \\ e_{1,\tau} &= \tfrac{1}{2}(U_1 - U_\alpha), \\ e_{P,1} &= \tfrac{1}{2}(F_1 + F_\alpha) - \tfrac{1}{2p}(U_1 + U_\alpha), \\ e_{P,\tau} &= \tfrac{1}{2}(F_1 - F_\alpha) - \tfrac{1}{2}(U_1 - U_\alpha). \end{aligned}$$

Ähnlich wie Korollar 3.6 beweist man

Korollar 3.9. *Es sei* $D \leq P$ *mit* $D \neq 1$, $c \in N_G(D)_{p'}$ *und* $Q, Q' \leq D$ *sowie* $s \in \mathrm{Sp}\big(A(N_G(D), \mathrm{Triv}, D)\big)$. *Dann ist*

$$s_{Q,c}(V_{1,(D:Q')}) = \begin{cases} (P:Q') & \textit{falls } Q' \geq Q \textit{ und } c \in C_G(D) \\ 1 & \textit{falls } Q' \geq Q \textit{ und } c \notin C_G(D) \\ 0 & \textit{falls } Q' < Q \end{cases} .$$

Von den Spezies von $A(kN_G(D), \mathrm{Triv})$ werden nun die mit Vertex D untersucht.

Korollar 3.10. *Es sei* $D \leq P$ *und* $c \in N_G(D)_{p'}$.

(i) Die Spezies von $A(k\langle D, c\rangle, \mathrm{Triv})$ *mit Vertex* D *sind*

$$u_{D,c^i} : A(k\langle D, c\rangle, \mathrm{Triv}) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad M \longmapsto \begin{cases} \varphi_M(c^i) & \textit{falls } M \textit{ einfach} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} .$$

Dabei ist $1 \leq i \leq \mathrm{ord}(c)$. *Der Ursprung von* $u_{D,c}$ *ist* $\langle D, c\rangle$.

(ii) Es gilt $s_{D,c} = u_{D,c} \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}$.

(iii) Für $D > 1$ *ist*

$$s_{D,c}(V_{1,1}) = \begin{cases} (P:D) & \textit{falls } c \in C_G(D) \\ 1 & \textit{falls } c \notin C_G(D) \end{cases} .$$

Beweis. Ein $k\langle D, c\rangle$-Modul hat Vertex D genau dann, wenn er einfach ist (Korollar 2.21). Satz 3.5 impliziert die erste Aussage von Teil (i). Da die Spezies $u_{D,c}$ Vertex D hat, ist ihr Ursprung eine Gruppe H mit $D \leq H \leq \langle D, c\rangle$. Also ist $u_{D,c} = u_{D,c^i} \circ \mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle D,c^i\rangle}$ für ein $i \in \{1, \ldots, \mathrm{ord}(c)\}$, welches $\mathrm{ord}(c)$ teilt. Da $\mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle D,c^i\rangle} F_\chi = F_{\chi^i}$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle)$ ist, ist dann $u_{D,c}(F_\chi) = \chi^i(c)$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle)$. Also ist $i = 1$.

Es sei M ein unzerlegbarer relativ D-projektiver $kN_G(D)$-Modul. Nach Korollar 2.24 haben M und die unzerlegbaren Summanden von $\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} M$ den gleichen Vertex. Hat M Vertex D , so ist

$$s_{D,c}(M) = \varphi_M(c) = \varphi_{\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} M}(c) = u_{D,c}\big(\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} M\big) = \big(u_{D,c} \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}\big)(M) .$$

Hat hingegen M einen Vertex kleiner D , so gilt $s_{D,c}(M) = 0$ und $u_{D,c}\big(\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} M\big) = 0$. Damit ist (ii) bewiesen. Teil (iii) folgt aus Korollar 3.9. □

Korollar 3.11. *Es sei* $D \le P$ *mit* $D \neq 1$, $y := \frac{1}{e}\sum_{i=1}^{e} F_{\alpha^{i-1}}$ *und*

$$e_D := V_{1,1} + \tfrac{1}{e}\big(\tfrac{1}{(P:D)} - 1\big)\sum_{i=1}^{e} V_{\alpha^{i-1},1}\,.$$

Dann ist $e_D = (1 + (\frac{1}{(P:D)} - 1)y)\, V_{1,1}$ *und*

$$\begin{aligned} A(kN_G(D), D) &= A(kN_G(D))\, e_D\,,\\ A(kN_G(D), \mathrm{Triv}, D) &= A(kN_G(D), \mathrm{Triv})\, e_D\,. \end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich ist e_D in $A(kN_G(D), D)$ und $A(kN_G(D), \mathrm{Triv}, D)$ enthalten. Da $V_{\alpha^{i-1},1} = F_{\alpha^{i-1}} \cdot V_{1,1}$ für $i = 1, \ldots, e$ gilt (Lemma 2.16), ist $e_D = (1 + (\frac{1}{(P:D)} - 1)y)\, V_{1,1}$. Wegen Korollar 3.9 ist $s(e_D) = 1$ für alle Spezies von $A(kN_G(D), \mathrm{Triv}, D)$. Also ist e_D das Einselement dieses Ideals. Ist $s \in \mathrm{Sp}\big(A(kN_G(D), D)\big)$, so ist $s = u \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}$ mit $c \in N_G(D)_{p'}$ und $u \in \mathrm{Sp}\big(A(k\langle D, c\rangle)\big)$. Da $u(F_\alpha)$ eine e-te Einheitswurzel ist, ist $s(e_D) = s'(e_D) = 1$ für eine Spezies s' von $A(kN_G(D), \mathrm{Triv}, D)$. Also ist e_D auch das Einselement von $A(kN_G(D), D)$. $\square$

Die primitiven Idempotente von $A(kG, \mathrm{Triv})$ werden aus den primitiven Idempotenten von $A(kN_G(D), \mathrm{Triv}, D)$ berechnet. Dazu sei $\mathcal{C}_D$ ein Vertretersystem der p'-Konjugationsklassen von $N_G(D)$ und $\lambda(D, c) \in A(kN_G(D), \mathrm{Triv}, D)$ wie im Satz 3.5 definiert. Ferner sei $\mu(D, c) = \mathrm{green}^G(\lambda(D, c)) \in A(kG, \mathrm{Triv}, D)$, also

$$\mu(D, c) = \frac{1}{|C_{N_G(D)/D}(cD)|} \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D))} \varphi(c^{-1}) M_{D,\varphi,1}\,,$$

und es seien

$$\begin{aligned} &\tilde e_{1,c} := e_{1,c}\,, \quad \tilde e_1 := \sum_{c \in \mathcal{C}_1} \tilde e_{1,c}\\ &\tilde e_{D,c} := (1 - \tilde e_{D'})\, \mu(D, c)\,, \quad \tilde e_D := \tilde e_{D'} + \sum_{c \in \mathcal{C}_D} \tilde e_{D,c} \end{aligned}$$

mit $1 \le D' < D \le P$ und $(D : D') = p$.

Satz 3.12. *Es gelten die Bezeichnungen von Satz 3.5 und Korollar 3.10. Die Spezies von* $A(kG, \mathrm{Triv})$ *sind*

$$\tilde s_{D,c} = s_{D,c} \circ \mathrm{res}^G_{N_G(D)} = u_{D,c} \circ \mathrm{res}^G_{\langle D,c\rangle}\,, \quad D \le P\,, \quad c \in N_G(D)_{p'}\,.$$

Die primitiven Idempotente von $A(kG, \mathrm{Triv})$ *sind*

$$\tilde e_{D,c}\,, \quad D \le P\,, \quad c \in N_G(D)_{p'}\,.$$

Die Spezies $\tilde s_{D,c}$ *hat Ursprung* $\langle D, c\rangle$. *Es gilt* $\tilde s_{D,c} = \tilde s_{D',c'}$ *genau dann, wenn* $D = D'$ *und* $c =_{N_G(D)} c'$ *ist.*

Beweis. Die erste und letzte Behauptung folgt aus (3.2), Satz 3.5 und Korollar 3.10. Die dritte Behauptung folgt aus Korollar 3.10.

Es sei $D \leq P$ und $\mathcal{C}$ ein Vertretersystem der p'-Konjugationsklassen von $N_G(D)$. Es sei $c \in \mathcal{C}$. Induktiv wird gezeigt, daß $\tilde{e}_{D,c}$ ein primitives Idempotent von $A(kG, \mathrm{Triv})$ mit $\tilde{s}_{D,c}(\tilde{e}_{D,c}) = 1$ ist. Für $D = 1$ ist $G = N_G(D)$. Nach Satz 3.5 ist $\tilde{e}_{1,c} = e_{1,c}$ ein primitives Idempotent. Es sei $D > 1$ und $D' < D$ mit $(D : D') = p$. Es wird nun angenommen, daß die Behauptung des Satzes für alle echten Untergruppen von D richtig ist. Es wird $\tilde{s}_{Q,c'}$ mit $Q \leq P$ und $c' \in N_G(Q)_{p'}$ betrachtet. Ist $Q < D$, so ist $Q \leq D'$. Nach Induktionsannahme ist dann $\tilde{s}_{Q,c'}(\tilde{e}_{D'}) = \tilde{s}_{Q,c'}(\tilde{e}_{Q,c'}) = 1$, woraus $\tilde{s}_{Q,c'}(\tilde{e}_{D,c}) = 0$ folgt. Es sei $Q > D$. Da $\mu(D,c) \in A(kG, \mathrm{Triv}, D)$ ist und $\tilde{s}_{Q,c'}$ Vertex Q hat, ist $\tilde{s}_{Q,c'}(\mu(D,c)) = 0$. Schließlich sei $Q = D$ und ohne Einschränkung $c' \in \mathcal{C}$. Dann ist $Q > D'$. Da $\tilde{e}_{D'} \in A(kG, \mathrm{Triv}, D')$ ist, ist $\tilde{s}_{Q,c'}(\tilde{e}_{D'}) = 0$. Außerdem ist $\tilde{s}_{Q,c'}(\mu(D,c)) = s_{D,c'}(\lambda(D,c)) = \delta_{cc'}$. Damit ist $\tilde{s}_{Q,c'}(\tilde{e}_{D,c}) = \delta_{QD}\delta_{cc'}$ gezeigt. □

Korollar 3.13. *Es sei $D \leq P$. Dann gilt*

$$A(kG, D) = A(kG)\,\tilde{e}_D\,,$$
$$A(kG, \mathrm{Triv}, D) = A(kG, \mathrm{Triv})\,\tilde{e}_D\,.$$

Beweis. Offensichtlich gilt die zweite Gleichung. Wegen Bemerkung 1.18 gilt auch die erste Gleichung. □

In den nächsten zwei Korollaren wird die bekannte Tatsache formuliert, daß eine Spezies von $A(kG)$ und ihre Einschränkung auf den Trivial-Source-Ring den gleichen Ursprung und somit den gleichen Vertex haben ([BP],7.). Auf einen Beweis wird hier nicht verzichtet, da er etwas über die Idempotente des Ideals $\mathrm{ind}_H^G A(kH)$ für $H \leq G$ aussagt.

Korollar 3.14. *Es sei $D \leq P$ und $\tilde{s}$ eine Spezies von $A(kG)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(1) Die Spezies $\tilde{s}$ hat Vertex D.

(2) Es ist $\tilde{s}|A(kG, \mathrm{Triv}) = \tilde{s}_{D,c}$ für ein $c \in N_G(D)_{p'}$.

(3) Es gilt $\tilde{s}(\tilde{e}_D) = 1$ und $\tilde{s}(\tilde{e}_{D'}) = 0$ für alle $D' < D$.

Beweis. Bemerkung 1.19 und Korollar 3.13. □

Korollar 3.15. *Es sei $D \leq P$, $c \in N_G(D)_{p'}$ und $\tilde{s}$ eine Spezies von $A(kG)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(1) Die Spezies $\tilde{s}$ hat Ursprung $\langle D, c\rangle$.

(2) Es ist $\tilde{s}|A(kG, \mathrm{Triv}) = \tilde{s}_{D,c}$.

(3) Es gilt $\tilde{s}(\tilde{e}_{D,c}) = 1$.

Beweis. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist offensichtlich. Es sei $H \leq G$. Nach (1.2) sind die Spezies von $\mathrm{ind}_H^G A(kH)$ genau die Spezies von $A(kG)$, deren Ursprung eine Untergruppe von H ist. Also sind $\{\tilde{s}_{Q,c'} \mid \langle Q, c'\rangle \leq H\}$ die Spezies von $\mathrm{ind}_H^G A(kH, \mathrm{Triv})$. Deswegen ist $\mathrm{ind}_H^G A(kH, \mathrm{Triv}) = A(kG, \mathrm{Triv})\, f$ mit $f = \sum_{\langle Q,c'\rangle \leq H} \tilde{e}_{Q,c}$. Es sei s eine Spezies von $\mathrm{ind}_H^G A(kH)$. Dann gilt $s = u \circ \mathrm{res}_H^G$ mit einer Spezies u von $A(kH)$. Somit ist $s|A(kG, \mathrm{Triv}) = \big(u|A(kH, \mathrm{Triv})\big) \circ \mathrm{res}_H^G$ eine Spezies von $\mathrm{ind}_H^G A(kH, \mathrm{Triv})$. Also ist $s(f) = 1$. Damit ist gezeigt, daß

$$\mathrm{ind}_H^G A(kH) = \bigoplus_{\langle Q,c'\rangle \leq H} A(kG)\, \tilde{e}_{Q,c'} \tag{3.3}$$

ist.

Nach Bemerkung 1.20 hat die Spezies $\tilde{s}$ Ursprung $\langle D, c\rangle$ genau dann, wenn $\mathrm{ind}_{\langle D,c\rangle}^G A(k\langle D, c\rangle) \not\subset \ker \tilde{s}$ und $\mathrm{ind}_H^G A(kH) \subset \ker \tilde{s}$ für alle $H < \langle D, c\rangle$ gilt. Nach dem eben gezeigten ist genau dann $\tilde{s}(\tilde{e}_{D,c}) = 1$. □

Ist $H \leq G$, so ist $A(kG) = \mathrm{ind}_H^G A(kH) \oplus \ker \mathrm{res}_H^G$ eine Zerlegung in Ideale (Bem. 1.15). Aus dem Beweis von Korollar 3.15 folgt

$$\ker \mathrm{res}_H^G = \bigoplus_{\langle Q,c\rangle \not\leq H} A(kG)\, \tilde{e}_{Q,c}\,.$$

Beispiel 3.16. Es sei $G = S_3$ und $p = 2$. Das Beispiel 2.26 wird fortgeführt. Die Speziestafel von $A(kN_G(P), \mathrm{Triv})$ ist

	T_1	T_2
$s_{1,1}$	1	2
$s_{P,1}$	1	0

Die Speziestafel für $A(kG, \mathrm{Triv}, 1)$ stimmt mit der Charaktertafel der projektiven Brauercharaktere überein.

	U_1	U_2
$s_{1,1}$	2	2
$s_{1,\tau}$	2	-1

Daraus ergibt sich die Speziestafel für $A(kG, \mathrm{Triv})$

	M_1	U_1	U_2
$\tilde{s}_{1,1} = s_{1,1}$	1	2	2
$\tilde{s}_{1,\tau} = s_{1,\tau}$	1	2	-1
$\tilde{s}_{P,1} = s_{P,1} \circ \mathrm{res}_{N_G(P)}^G$	1	0	0

Da $A(kG)$ keinen weiteren unzerlegbaren Modul besitzt, ist dies auch die Speziestafel für $A(kG)$.

Beispiel 3.17. Es sei $G = A_5$ und $p = 5$. Dann ist $N_G(P) = D_{10}$. Die Spezies und Idempotente von $A(kN_G(P), \mathrm{Triv})$ wurden im Beispiel 3.8 berechnet. Die Speziestafel von $A(kG, \mathrm{Triv}, 1)$ stimmt mit der Charaktertafel der projektiven Brauercharaktere überein (siehe Beispiel 2.27). Sie hat demnach folgende Gestalt:

	U_1	U_2	U_3
$s_{1,1}$	5	10	5
$s_{1,\tau}$	1	-2	1
$s_{1,\rho}$	2	1	-1

Mit Hilfe der Tabellen aus Beispiel 2.27 bekommt man die Speziestafel für $A(kG, \mathrm{Triv})$:

	$M_{1,1}$	$M_{\alpha,1}$	U_1	U_2	U_3
$\tilde{s}_{1,1}$	1	6	5	10	5
$\tilde{s}_{1,\tau}$	1	-2	1	-2	1
$\tilde{s}_{1,\rho}$	1	0	2	1	-1
$\tilde{s}_{P,1} = s_{P,1} \circ \mathrm{res}^G_{N_G(P)}$	1	1	0	0	0
$\tilde{s}_{P,\tau} = s_{P,\tau} \circ \mathrm{res}^G_{N_G(P)}$	1	-1	0	0	0

3.3 Die Spezies und Idempotente von $A(kP)$

Wie im Kapitel 2 werden die Vertreter der j-dimensionalen kD-Moduln, wobei $D \leq P$ ist, mit T_j bezeichnet. Da $a(kD)$ isomorph zu $\inf^P_{P/Q} a(P/Q)$ mit $D \cong P/Q$ ist und $\inf^P_{P/Q} a(P/Q)$ ein Teilring von $a(kP)$ ist, kann $a(kD)$ als Teilring von $a(kP)$ aufgefaßt werden. Entsprechend wird $A(kD)$ als Unteralgebra von $A(kP)$ angesehen.

Die Abbildung

$$\langle\, .\, , .\, \rangle : A(kP) \times A(kP) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad (M, N) \longmapsto \dim_k \mathrm{Hom}_{kP}(M, N)$$

ist eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform. Da $\mathrm{Hom}_{kP}(M_1 \otimes_k M_2, M_3) \cong \mathrm{Hom}_{kP}(M_1, M_2 \otimes_k M_3)$ für kP-Moduln M_1, M_2 und M_3 ist, gilt $\langle xy, z\rangle = \langle x, yz\rangle$ für $x, y, z \in A(kP)$. Also ist $A(kP)$ eine symmetrische $\mathbb{C}$-Algebra. Im Beweis von Lemma 2.2 wird gezeigt, daß $\langle T_i, T_j\rangle = \min\{i, j\}$ für $1 \leq i, j \leq p^d$ ist. Die Dualbasis zur $\mathbb{C}$-Basis $\{T_1, \ldots, T_{p^d}\}$ bzgl. dieser Bilinearform erhält man, indem man die Matrix $B := (\min\{i, j\})_{i,j}$ invertiert. Die Einträge der i-ten Spalte (oder Zeile) von B^{-1} bilden das zu T_i duale Element $\hat{T}_i \in A(kP)$. Beispielsweise für $p = 7$ und $d = 1$

ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der allgemeine Fall unterscheidet sich von diesem Beispiel nur durch die Größe der Matrix. Die dualen Basiselemente sind also

$$\hat{T}_i = 2\,T_i - T_{i-1} - T_{i+1}\,, \quad \hat{T}_{p^d} = T_{p^d} - T_{p^d-1}\,, \quad 1 \le i < p^d\,.$$

Umgekehrt ist $T_j = \sum_{i=1}^{p^d} \langle T_i, T_j \rangle\, \hat{T}_i = \sum_{i=1}^{p^d} \min\{i,j\}\, \hat{T}_i$. Ein wichtiges Element ist

$$z := \sum_{i=1}^{p^d} \hat{T}_i \cdot T_i \in a(kP)\,.$$

Für $s \in \mathrm{Sp}(A(kP))$ sei $\eta_s = s(z)$. Die oben eingeführte Bilinearform existiert auch für den Greenring einer beliebigen endlichen Gruppe. Siehe dazu [BP] oder [CR], Kap 81D. Auch die Gleichung (3.4) des folgenden Satzes läßt sich verallgemeinern (siehe [BP], 9.).

Satz 3.18. *Es wird angenommen, daß $s(a(kP)) \subset \mathbb{R}$ für alle $s \in \mathrm{Sp}(A(kP))$ ist.*

(i) Es ist $\eta_s > 0$ für alle $s \in \mathrm{Sp}(A(kP))$.

(ii) Die primitiven Idempotente von $A(kP)$ sind

$$e_s := \frac{1}{\eta_s} \sum_{i=1}^{p^d} s(\hat{T}_i)\, T_i\,, \quad s \in \mathrm{Sp}(A(kP))\,.$$

(iii) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{p^d} s(\hat{T}_i)\, t(T_i) = \begin{cases} \eta_s & \textit{falls } s = t \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}\,, \quad s,t \in \mathrm{Sp}(A(kP))\,,$$

und

$$\sum_{s \in \mathrm{Sp}(A(kP))} \frac{s(x)\, s(y)}{\eta_s} = \langle x, y \rangle\,, \quad x, y \in A(kP)\,. \tag{3.4}$$

(iv) Es sei A die Speziestafel von $A(kP)$, also $A = (s(T_j))_{s,j} \in \mathrm{Mat}(p^d, \mathbb{R})$ mit $s \in \mathrm{Sp}(A(kP))$ und $1 \le j \le p^d$. Dann ist $(\det A)^2 = \prod_{s \in \mathrm{Sp}(A(kP))} \eta_s$.

Beweis. Es ist

$$z = (T_{p^d} - T_{p^d-1})\, T_{p^d} + \sum_{i=1}^{p^d-2} (2\,T_i - T_{i-1} - T_{i+1})\, T_i = 1 + \sum_{i=2}^{p^d} (T_i - T_{i-1})^2 . \tag{3.5}$$

Da Spezies reellwertig auf $a(kP)$ sind, ist $s(z) > 0$ für alle $s \in \mathrm{Sp}(A(kP))$.

Es sei $s \in \mathrm{Sp}(A(kP))$ und $e_s \in A(kP)$ wie oben definiert. Dann ist $s(e_s) = 1$ und $\langle e_s, \hat{T}_j \rangle = \frac{s(\hat{T}_j)}{\eta_s}$ für $1 \le j \le p^d$. Folglich ist $\langle e_s, x \rangle = \frac{s(x)}{\eta_s}$ für alle $x \in A(kP)$. Deshalb ist $\langle {e_s}^2, x \rangle = \langle e_s, e_s\, x \rangle = \frac{s(e_s)\, s(x)}{\eta_s} = \frac{s(x)}{\eta_s}$. Also ist ${e_s}^2 = e_s$. Es bleibt zu zeigen, daß $s(e_t) = \delta_{s,t}$ für alle $s, t \in \mathrm{Sp}(A(kP))$ gilt. Wähle dazu $s, t \in \mathrm{Sp}(A(kP))$ mit $s \ne t$. Dann ist $e_s \ne e_t$, da sonst $\eta_s = \langle e_s, 1 \rangle^{-1} = \langle e_t, 1 \rangle^{-1} = \eta_t$ und $s(x) = \langle e_s, \eta_s x \rangle = \langle e_t, \eta_t x \rangle = t(x)$ für alle $x \in A(kP)$ gilt. Angenommen, es ist $s(e_t) = 1$. Dann ist $t(e_s) = \eta_t \langle e_t, e_s \rangle = \eta_t \langle e_s, e_t \rangle = \frac{\eta_t}{\eta_s} \ne 0$, also $t(e_s) = 1$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \langle e_s - e_t, x \rangle &= \langle e_s^2 - e_t^2, x \rangle = \langle e_s + e_t, (e_s - e_t)x \rangle \\ &= \langle e_s, (e_s - e_t)x \rangle + \langle e_t, (e_s - e_t)x \rangle = \frac{s(e_s - e_t)\, s(x)}{\eta_s} + \frac{t(e_s - e_t)\, t(x)}{\eta_t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in A(kP)$. Daraus folgt $e_s = e_t$, was im Widerspruch zum eben Gezeigten steht. Also ist $s(e_t) = 0$.

Die erste Behauptung von (iii) folgt unmittelbar aus (ii). Es sei A wie in Teil (iv) definiert, $B := (\langle T_i, T_j \rangle)_{1 \le i,j \le p^d} \in \mathrm{Mat}(p^d, \mathbb{C})$ und $D := (\mathrm{diag}(\eta_s))_{s \in \mathrm{Sp}(A(kP))} \in \mathrm{Mat}(p^d, \mathbb{C})$. Dann ist die erste Behauptung von (iii) gleichbedeutend mit $AB^{-1}A^T = D$. Folglich ist $B = A^T D^{-1} A$. Also ist $\sum_{s \in \mathrm{Sp}(A(kP))} \frac{s(T_i)\, s(T_j)}{\eta_s} = \langle T_i, T_j \rangle$, woraus die zweite Behauptung von (iii) folgt. Da $\det B = 1$ ist, ist $(\det A)^2 = \det D$, also gilt auch (iv). $\square$

Nun werden die Spezies von $A(kP_1)$ bestimmt. Es wird sich herausstellen, daß die Spezies von $A(kP)$ sich aus denen von $A(kP_1)$ zusammensetzen. Ist $p = 2$, so ist

	T_1	T_2
s_1	1	2
s_2	1	0

die Speziestafel von $A(kP_1)$ und

$$e_1 = \tfrac{1}{2} T_2 , \quad e_2 = 1 - \tfrac{1}{2} T_2$$

sind die primitiven Idempotente von $A(kP_1)$. Nun sei $p > 2$. Satz 2.9, (i), mit $q = 1$ besagt, daß

$$T_2 \cdot T_j = T_{j-1} + T_{j+1} , \quad T_2 \cdot T_p = 2\, T_p , \quad 1 \le j < p \tag{3.6}$$

ist. Der Ring $A(kP_1)$ wird also von T_2 erzeugt. Eine Spezies s von $A(kP_1)$ ist somit durch die komplexe Zahl $s(T_2)$ eindeutig bestimmt.

Es wird der $\mathbb{C}$-Vektorraumendomorphismus

$$\phi : A(kP_1) \longrightarrow A(kP_1)\,, \quad x \longmapsto T_2 \cdot x$$

und das Minimalpolynom $f \in \mathbb{C}[X]$ von ϕ bzw. T_2 betrachtet (siehe Seite 21). Da es genau p Spezies von $A(kP_1)$ gibt, die Bilder von T_2 paarweise verschieden sind und $\operatorname{grad} f \leq p$ ist, ist

$$f(X) = \sum_{s \in \mathrm{Sp}(A(kP_1))} (X - s(T_2))\,.$$

Um die Spezies zu bekommen, müssen demnach die Eigenwerte von ϕ bestimmt werden. Die Abbildungsmatrix von ϕ bzgl. der Standardbasis $\{T_1, \ldots, T_p\}$ von $A(kP)$ beispielsweise für $p = 7$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von ϕ sind 2 und $\pm(\zeta + \zeta^{-1})$, wobei ζ die primitiven p-ten Einheitswurzeln von $\mathbb{C}$ durchläuft. Also ist

$$f(X) = (X - 2) \cdot \mathrm{minpol}_{\mathbb{Q}}(\zeta + \zeta^{-1}) \cdot \mathrm{minpol}_{\mathbb{Q}}(-(\zeta + \zeta^{-1})) \in \mathbb{Z}[X]\,.$$

Etwas kompakter formuliert, bestehen die Eigenwerte von ϕ aus den Elementen $\gamma + \gamma^{-1}$, wobei $\gamma \in \mathbb{C}$ eine $2p$-te Einheitswurzel ungleich -1 ist. Die zugehörigen Spezies werden manchmal mit γ indiziert. Es ist also $s_\gamma(T_2) = \gamma + \gamma^{-1}$. Weiterhin ist $s_\gamma = s_{\gamma'}$ genau dann, wenn $\gamma' = \gamma^{\pm 1}$ ist. Die Werte $s(T_i)$ für $i \geq 3$ werden rekursiv aus (3.6) gewonnen. So erhält man

$$s_\gamma(T_j) = \gamma^{-j+1} + \gamma^{-j+3} + \cdots + \gamma^{j-1}\,, \quad \gamma \in U_{2p} \backslash \{-1\}\,, \quad 1 \leq j \leq p\,,$$

wobei mit U_n für $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln von $\mathbb{C}$ bezeichnet wird. Also ist

$$s_\gamma(T_j) = \begin{cases} \frac{\gamma^j - \gamma^{-j}}{\gamma - \gamma^{-1}} & \text{falls } \gamma \in U_{2p} \backslash \{\pm 1\} \\ j & \text{falls } \gamma = 1 \end{cases}\,, \quad 1 \leq j \leq p\,.$$

Diese Formel zeigt, daß $s_\gamma(T_p) = 0$ für $\gamma \neq 1$ ist. Die Zahl $s_\gamma(T_j)$ liegt im Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_L$ des Körpers $L := \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$. Der Körper L ist der größte reelle Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta)$. Bekanntlich ist $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\zeta + \zeta^{-1}]$ (siehe etwa [Mar], Seite 48). Für $p \leq 3$ ist $L = \mathbb{Q}$. Ist $p \geq 3$, $\gamma \neq 1$ und $1 \leq j < p$, so ist $s_\gamma(T_j)\,\gamma^{j-1} = \frac{\gamma^{2j}-1}{\gamma^2-1} = \frac{\tau(\gamma^2-1)}{\gamma^2-1}$ für $\tau \in G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ mit $\tau(\zeta) = \zeta^j$. Nach Hilberts Satz 90 ist dann $s_\gamma(T_j)$ eine Einheit in $\mathcal{O}_L$. Die Formel für die Spezies ist auch im Fall $p = 2$ richtig. Dann ist $\gamma \in \{\pm i, 1\}$ und $\gamma + \gamma^{-1} \in \{0, 2\}$. Es gilt also

Satz 3.19. *Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Die Spezies von $A(kP_1) = \mathbb{C}[T_2]$ sind*

$$s_\gamma : A(kP_1) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad T_2 \longmapsto \gamma + \gamma^{-1}\,, \quad \gamma \in U_{2p}\backslash\{-1\}\,.$$

Es gilt $s_\gamma = s_{\gamma'}$ genau dann, wenn $\gamma' = \gamma^{\pm 1}$ ist. Die Spezies s_γ hat Vertex P_1 genau dann, wenn $\gamma \neq 1$ ist.

Beispiel 3.20. Die Speziestafel von $A(kP_1)$ für $p = 3$ ist

	T_1	T_2	T_3
s_1	1	2	3
s_ζ	1	-1	0
$s_{(-\zeta)}$	1	1	0

Die primitiven Idempotente sind

$$e_1 = \tfrac{1}{3}\,T_3\,, \quad e_\zeta = \tfrac{1}{6}(3\,T_1 - 3\,T_2 + T_3)\,, \quad e_{(-\zeta)} = \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2 - T_3)\,.$$

Korollar 3.21. *Es gilt $a(kP_1) = \mathbb{Z}[T_2] = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{Z}\,{T_2}^i$.*

Beweis. Die Aussage ist offensichtlich richtig für $p = 2$. Deshalb sei nun $p > 2$. Da das Minimalpolynom f von T_2 aus $\mathbb{Z}[X]$ ist und $\operatorname{grad} f = p$ gilt, ist $\mathcal{B} := \{{T_2}^i \mid 0 \leq i < p\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}[T_2] \subset a(kP_1)$. Also gilt $\mathbb{Z}[T_2] = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{Z}\,{T_2}^i$. Nach (3.6) ist $T_j\,, 1 \leq j \leq p$, eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Elementen aus $\mathbb{Z}[T_2]$. Somit ist $a(kP) = \mathbb{Z}[T_2]$. □

Da die Spezies von $A(kP)$ reellwertig sind, sind die Voraussetzungen von Satz 3.18 erfüllt. Dort werden die primitiven Idempotente von $A(kP_1)$ mit Hilfe der Spezies und der Dualbasis berechnet. Das nächste Korollar liefert diese Idempotente in einer anderen Form.

Korollar 3.22. *Es sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ das Minimalpolynom von T_2, L wie oben definiert und A die Speziestafel von $A(kP_1)$.*

(i) Zu $s \in \mathrm{Sp}(A(kP_1))$ sei $g_s(X) \in \mathcal{O}_L[X]$ gegeben durch die Gleichung

$$f(X) = (X - s(T_2))\, g_s(X)\,.$$

Dann ist

$$e_s = \frac{g_s(T_2)}{f'(s(T_2))}\,,$$

wobei f' die formale Ableitung von f nach X ist.

(ii) Es gilt $\frac{f'(s(T_2))}{\eta_s} \in \mathcal{O}_L^*$ und $(\det A)^2 = \pm \prod_{s\in \mathrm{Sp}(A(kP_1))} f'(s(T_2)) = (2p)^{p-1}$.

(iii) Es sei $p \neq 2$ und $N_{L/\mathbb{Q}} : L \longrightarrow \mathbb{Q}\,,\ x \longmapsto \prod_{\sigma\in G(L/\mathbb{Q})} \sigma(x)$ die Normabbildung. Dann gilt

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(\eta_{s_\gamma})| = \begin{cases} p^{\frac{p-1}{2}} & \textit{falls } \gamma = 1 \\ (2p)^{\frac{p-1}{2}} & \textit{falls } \gamma \in U_p\backslash\{1\} \\ 2^{\frac{p-1}{2}} p^{\frac{p-3}{2}} & \textit{sonst} \end{cases}\,.$$

Beweis. Da f keine mehrfachen Nullstellen hat, ist $f'(s(T_2)) \neq 0$. Es sei $t \in \mathrm{Sp}\,\big(A(kP)\big)$. Dann ist

$$t(g_s(T_2)) = g_s(t(T_2)) = \begin{cases} f'(t(T_2)) & \text{falls } s = t \\ 0 & \text{falls } s \neq t \end{cases}\,.$$

Damit ist (i) bewiesen. Es sei C die Übergangsmatrix von der Standardbasis von $a(kP_1)$ zur Basis $\{{T_2}^i \mid 0 \leq i < p\}$. Dann ist $|\det C| = 1$ und $A' := AC = (s(T_2^j))_{s,j}$ mit $s \in \mathrm{Sp}(A(kP_1))$ und $0 \leq j < p$. Die Matrix A' ist eine Vandermondesche Matrix. Ihre Determinante ist $\pm \prod_{i<j}(s_i(T_2) - s_j(T_2))$, wobei die Spezies von $A(kP_1)$ mit Indizes von 1 bis p versehen sind. Also ist

$$(\det A)^2 = (\det A')^2 = \prod_{i<j}(s_i(T_2) - s_j(T_2))^2 = \pm \prod_{s=1}^{p} f'(s_i(T_2))\,.$$

Die andere Gleichheit von (ii) wird am Ende des Beweises gezeigt. Da $\langle e_s, 1\rangle = \frac{1}{\eta_s}$ und $g_s(X) \in \mathcal{O}_L[X]$ ist, ist

$$\frac{f'(s(T_2))}{\eta_s} = \langle e_s, f'(s(T_2))\rangle = \langle g_s(T_2), 1\rangle \in \mathcal{O}_L\,.$$

Da $\pm \prod_s f'(s(T_2)) = (\det A)^2 = \prod_s \eta_s$ gilt (Satz 3.18, (iv)), ist $\frac{f'(s(T_2))}{\eta_s}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_L$.

Beispiel 3.20 zeigt, daß die Aussage (iii) für $p = 3$ richtig ist. Deswegen sei $p > 3$. Ferner sei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel, $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$, $h_1 = \mathrm{minpol}_{\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}[X]$

und $h_2 = \mathrm{minpol}_{\mathbb{Q}}(-\alpha) \in \mathbb{Z}[X]$. Außerdem sei $s_1 \in \mathrm{Sp}(A(kP_1))$ mit $s_1(T) = \dim_k T$ für $T \in A(kP_1)$. Dann ist $f(X) = (X-2)\,h_1(X)\,h_2(X)$. Wegen (3.5) ist $\eta_{s_1} = s_1(z) = p$. Nach (ii) ist $f'(2) = f'(s_1(T_2)) = \pm\eta_{s_1} = \pm p$. Da $f'(2) = h_1(2)\,h_2(2)$ ist, ist $h_1(2) = \pm p$ und $h_2(2) = \pm 1$ oder aber $h_1(2) = \pm 1$ und $h_2(2) = \pm p$.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_L$ mit $p \in \mathfrak{p}$. Dann ist $\alpha \equiv 2 \pmod{\mathfrak{p}}$. Also ist p ein Teiler von $N_{L/\mathbb{Q}}(2-\alpha)$. Da $N_{L/\mathbb{Q}}(2-\alpha) = h_1(2)$ und $N_{L/\mathbb{Q}}(2+\alpha) = h_2(2)$ ist, gilt $N_{L/\mathbb{Q}}(2-\alpha) = \pm p$ und $N_{L/\mathbb{Q}}(2+\alpha) = \pm 1$.

Es sei $\tau \in G(L/\mathbb{Q})$ mit $\tau(\alpha) = \zeta^2 + \zeta^{-2}$ und es sei $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$ mit $\sigma \neq 1$. So ist $\alpha^2 = \tau(\alpha) + 2$. Da $G(L/\mathbb{Q})$ abelsch ist, ist $\alpha + \sigma(\alpha) = \frac{\alpha^2 - \sigma(\alpha^2)}{\alpha - \sigma(\alpha)} = \frac{\tau(\alpha - \sigma(\alpha))}{\alpha - \sigma(\alpha)}$. Also ist $N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha + \sigma(\alpha)) = 1$. Da α eine Einheit ist, ist $N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = 1$. Somit ist $N_{L/\mathbb{Q}}(2\alpha) = N_{L/\mathbb{Q}}(2)\,N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = 2^{[L:\mathbb{Q}]}$. Wegen $h_2(\alpha) = \prod_{\sigma \in G(L/\mathbb{Q})}(\alpha + \sigma(\alpha))$ gilt dann

$$N_{L/\mathbb{Q}}(h_2(\alpha)) = \prod_{\sigma \in G(L/\mathbb{Q})} N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha + \sigma(\alpha)) = N_{L/\mathbb{Q}}(2\alpha) \prod_{\sigma \neq 1} N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha + \sigma(\alpha)) = 2^{[L:\mathbb{Q}]}.$$

Es sei d_L die Körperdiskriminante von L. Da h_1 das Minimalpolynom des Erzeugers α von $\mathcal{O}_L$ ist, ist $d_L = |N_{L/\mathbb{Q}}({h_1}'(\alpha))|$. Nach [Mar], Seite 48, ist $d_L = p^{\frac{p-3}{2}}$. Also ist $N_{L/\mathbb{Q}}({h_1}'(\alpha)) = p^{\frac{p-3}{2}}$.

Es gilt $f'(\alpha) = (\alpha - 2)\,{h_1}'(\alpha)\,h_2(\alpha)$ und $f'(-\alpha) = -(\alpha+2)\,h_1(-\alpha)\,{h_2}'(-\alpha)$. Somit ist

$$\begin{aligned} N_{L/\mathbb{Q}}(f'(\alpha)) &= N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha - 2)\,N_{L/\mathbb{Q}}({h_1}'(\alpha))\,N_{L/\mathbb{Q}}(h_2(\alpha)) \\ &= \pm p \cdot p^{\frac{p-3}{2}} \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} = \pm(2p)^{\frac{p-1}{2}}. \end{aligned}$$

Da $N_{L/\mathbb{Q}}(h_1(-\alpha)) = N_{L/\mathbb{Q}}(h_2(\alpha))$ und $N_{L/\mathbb{Q}}({h_2}'(-\alpha)) = N_{L/\mathbb{Q}}({h_1}'(\alpha))$ gilt, bekommt man $N_{L/\mathbb{Q}}(f'(-\alpha)) = \pm 2^{\frac{p-1}{2}}\,p^{\frac{p-3}{2}}$.

Für $\gamma \in U_p \backslash \{1\}$ ist $N_{L/\mathbb{Q}}(\eta_{s_\gamma}) = N_{L/\mathbb{Q}}(f'(\gamma + \gamma^{-1})) = N_{L/\mathbb{Q}}(f'(\alpha))$ und für $\gamma \in U_{2p} \backslash U_p$ ist $N_{L/\mathbb{Q}}(\eta_{s_\gamma}) = N_{L/\mathbb{Q}}(f'(\gamma + \gamma^{-1})) = N_{L/\mathbb{Q}}(f'(-\alpha))$. Also gilt (iii). Zum Schluß wird mit (iii) die zweite Gleichheit von (ii) gezeigt. Es ist

$$\begin{aligned} (\det A)^2 = \pm \prod_{s=1}^{p} f'(s_i(T_2)) &= \pm f'(2) \prod_{\sigma \in G(L/\mathbb{Q})} f'(\sigma(\alpha)) f'(\sigma(-\alpha)) \\ &= \pm f'(2)\,N_{L/\mathbb{Q}}(f'(\alpha))\,N_{L/\mathbb{Q}}(f'(-\alpha)). \end{aligned}$$

Man setzt die oben berechneten Faktoren ein und erhält das gewünschte Ergebnis. □

Mit den Elementen η_s beschäftigte sich auch P. J. Webb. In seiner Veröffentlichung [Web] werden sie explizit angegeben ([Web], Thrm 4.4). Nach [Web], Lemma 4.5, sind η_s algebraisch ganze Zahlen, welche $2p$ teilen. Dies folgt auch aus Korollar 3.22, (iii). Zwischenergebnisse des Beweises von (iii) werden später verwendet und deshalb hier festgehalten:

Bemerkung 3.23. *Es sei $p > 3$, ζ eine primitive p-te Einheitswurzel, $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$ und $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$ mit $\sigma \neq 1$. Dann ist*

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(2-\alpha)| = p\,, \quad |N_{L/\mathbb{Q}}(2+\alpha)| = 1\,, \quad |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha+\sigma(\alpha))| = 1\,.$$

Als nächstes wird der Ring $a(kP_d)$ bzw. $A(kP_d)$ untersucht. Dabei wird induktiv von $A(kP_{d-1})$ auf $A(kP_d)$ geschlossen. Im folgenden sei $q = p^{d-1}$. Ferner seien $t_1, \ldots, t_q$ die Spezies von $A(kP_{d-1})$ und $s_1, \ldots, s_p$ die Spezies von $A(kP_1)$. Weiterhin sei

$$w := (T_{q+1} - T_{q-1})(T_q - T_{q-1}) = 1 - T_{2q-1} + T_{2q} \in a(kP)\,. \tag{3.7}$$

Aus Satz 2.9 lassen sich folgende Formeln ableiten:

$$\begin{aligned} T_{(m+1)q} &= (T_{q+1} - q + 1)\, T_{mq} \;\; - T_{(m-1)q} \\ T_{(m+1)q+1} &= T_{mq+1}(T_{q+1} - T_{q-1}) - T_{(m-1)q+1} \\ T_{mq+j} &= T_{mq+1} \cdot T_j - (j-1) T_{mq} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dabei ist $1 \leq j \leq q$ und $1 \leq m \leq p-1$. Bei der zweiten Formel muß zusätzlich $m \neq p-1$ und $q \neq 1$ gelten.

Lemma 3.24. *Es sei w wie in (3.7) definiert und $w_a := (T_{p^a+1} - T_{p^a-1})(T_{p^a} - T_{p^a-1}) \in a(kP_a)$ mit $0 \leq a \leq d-1$. Dann ist*

$$a(kP) = a(kP_{d-1})[T_{q+1}] = \mathbb{Z}[T_2, T_{p+1}, T_{p^2+1}, \ldots, T_{p^{d-1}+1}]$$

sowie

$$a(kP) = a(kP_{d-1})[w] = \mathbb{Z}[w_0, w_1, \ldots, w_{d-1}]\,.$$

Beweis. Wegen (3.8) ist $T_{(m+1)q} \in a(kP_{d-1})[T_{q+1}]$ für alle $1 \leq m < p$. Dann ist auch $T_{(m+1)q+1} \in a(kP_{d-1})[T_{q+1}]$ für alle $1 \leq m < p-1$. Schließlich ist $T_{mq+j} \in a(kP_{d-1})[T_{q+1}]$ für alle $1 \leq m < p$ und $1 \leq j \leq q$. Also gilt $a(kP) = a(kP_{d-1})[T_{q+1}]$. Aus diesem Ergebnis und Korollar 3.22 folgt induktiv die nächste Gleichheit. Da $a(kP) = a(kP_{d-1})[T_{q+1}]$ und $T_{q+1} = w\,(T_q - T_{q-1}) + T_{q-1} \in a(kP_{d-1})[w]$ ist, ist $a(kP) = a(kP_{d-1})[w]$. Die andere Gleichheit ergibt sich ebenfalls induktiv. □

Lemma 3.25. *Es sei $x \in a(kP_{d-1})$ und $y \in \mathbb{Z}[w] \subset a(kP)$. Dann ist*

$$\langle x, y\rangle = \langle x, 1\rangle \cdot \langle 1, y\rangle\,.$$

Beweis. Es wird gezeigt, daß $\langle T_j, y\rangle = \langle 1, y\rangle$ für alle $j \in \{1, \ldots, q\}$ und $y \in \mathbb{Z}[w]$ ist. Ist M ein kP_{d-1}-Modul und ist m die Anzahl der unzerlegbaren direkten Summanden von M, so ist dann $\langle M, y\rangle = m\,\langle 1, y\rangle = \langle M, 1\rangle\langle 1, y\rangle$. Da $x \in a(kP_{d-1})$ sich in der Form $x = M - N$ mit kP_{d-1}-Moduln M und N schreiben läßt (Bem. 1.11) und

$\{T_1, \ldots, T_q\}$ eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $a(kP_{d-1})$ ist, gilt dann die Behauptung auch für beliebige Elemente aus $a(kP_{d-1})$.

Satz 2.9 und Korollar 2.10 liefern die Formeln

$$\begin{aligned}
T_{q+1} \cdot T_{mq+1} &= T_{(m-1)q+1} + T_{(m+1)q-1} + T_{(m+1)q+1} + (q-2)\, T_{mq} \\
T_{q+1} \cdot T_{(p-1)q+1} &= T_{(p-2)q+1} + 2\, T_{p^d} + (q-2)\, T_{(p-1)q} \\
T_{q+1} \cdot T_{mq-1} &= T_{(m-1)q-1} + T_{(m-1)q+1} + T_{(m+1)q-1} + (q-2)\, T_{mq} \\
T_{q-1} \cdot T_{mq+1} &= T_{(m+1)q-1} + (q-2)\, T_{mq} \\
T_{q-1} \cdot T_{mq-1} &= T_{(m-1)q+1} + (q-2)\, T_{mq}
\end{aligned}$$

In den Formeln ist $1 \leq m \leq p-1$. Bei der ersten Formel ist außerdem $m \neq p-1$, bei der dritten ist $m \neq 1$. Nach Lemma 2.5 und Lemma 2.6, (iii), gilt

$$\begin{aligned}
T_{q+1} \cdot T_{p^d} &= (q+1)\, T_{p^d} & \qquad T_{q+1} \cdot T_{p^d-1} &= T_{(p-1)q-1} + q\, T_{p^d} \\
T_{q-1} \cdot T_{p^d} &= (q-1)\, T_{p^d} & \qquad T_{q-1} \cdot T_{p^d-1} &= T_{(p-1)q+1} + (q-2)\, T_{p^d}
\end{aligned}$$

Es sei $a_m := T_{mq+1} - T_{mq-1}$ mit $1 \leq m \leq p-1$. Ist $p \neq 2$ und $2 \leq m \leq p-1$, so ist

$$\begin{aligned}
{a_1}^2 &= 2 + a_2 & \qquad a_1 \cdot a_{p-1} &= a_{p-2} + 2(T_{p^d} - T_{p^d-1}) \\
a_1 \cdot a_m &= a_{m-1} + a_{m+1} & \qquad a_1 \cdot (T_{p^d} - T_{p^d-1}) &= a_{p-1}
\end{aligned}$$

Ist $p = 2$, dann ist

$${a_1}^2 = 2 + T_{p^d} - T_{p^d-1}\,, \quad a_1 \cdot (T_{p^d} - T_{p^d-1}) = a_1\,.$$

Per Induktion nach $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ zeigt man, daß für alle p

$${a_1}^n = \begin{cases} r_1\, a_1 + r_3\, a_3 + \cdots + r_{p-2}\, a_{p-2} + r'(T_{p^d} - T_{p^d-1}) & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ r_0 + r_2\, a_2 + \cdots + r_{p-1}\, a_{p-1} + r'(T_{p^d} - T_{p^d-1}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

mit $r_i, r' \in \mathbb{Z}$ gilt.

Es sei $j \in \{1, \ldots, q\}$. Dann ist $\langle a_m, T_j \rangle = 0$ für $m \geq 2$ und $\langle T_{p^d} - T_{p^d-1}, T_j \rangle = 0$. Für $x \in a(kP_{d-1})$ ist folglich $\langle a_m, x \rangle = 0$ für $m \geq 2$ und $\langle T_{p^d} - T_{p^d-1}, x \rangle = 0$. Deshalb ist

$$\langle {a_1}^n, x \rangle = \begin{cases} r_1\, \langle a_1, x \rangle & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ r_0\, \langle 1, x \rangle & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Außerdem ist $\langle w, T_j \rangle = 1$. Da $(T_q - T_{q-1})^2 = 1$ ist, ist $w^n = {a_1}^n$ für gerades n und $w^n = {a_1}^n\,(T_q - T_{q-1})$ für ungerades n. Ist n ungerade, so ist

$$\langle w^n, T_j \rangle = \langle {a_1}^n, (T_q - T_{q-1})\, T_j \rangle = r_1\, \langle a_1, (T_q - T_{q-1})\, T_j \rangle = r_1\, \langle w, T_j \rangle = r_1\,.$$

Ist n gerade, so ist

$$\langle w^n, T_j \rangle = \langle {a_1}^n, T_j \rangle = r_0 \, \langle 1, T_j \rangle = r_0 \, .$$

In beiden Fällen ist also $\langle w^n, T_j \rangle = \langle w^n, T_1 \rangle = \langle w^n, 1 \rangle$. Da der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}[w]$ von den w^n erzeugt wird, gilt $\langle y, T_j \rangle = \langle y, 1 \rangle$ für alle $y \in \mathbb{Z}[w]$. □

Satz 3.26. *Die Abbildung*

$$\varphi : a(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} a(kP_1) \longrightarrow a(kP) \, , \quad T_j \otimes 1 \longmapsto T_j \, , \quad 1 \otimes T_2 \longmapsto w \, , \quad 1 \le j \le q \, ,$$

ist ein Ringisomorphismus. Es gilt also

$$a(kP) = a(kP_{d-1})[w] \cong a(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[w] \cong a(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} a(kP_1) \, .$$

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $\mathbb{Z}[w] \longrightarrow a(kP_1)$, $w \longmapsto T_2$ ein Isomorphismus ist. Dann ist $a(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} a(kP_1)$ isomorph zu $a(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[w]$. Ferner stimmt der $\mathbb{Z}$-Rang von $a(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[w]$ mit dem von $a(kP_{d-1})[w]$ überein. Diese beiden Ringe sind also isomorph. Da $a(kP_{d-1})[w] = a(kP)$ gilt (Lemma 3.24), ist schließlich φ ein Isomorphismus.

Da $\mathrm{res}^P_{P_1} w = T_2$ ist, ist

$$\psi : \mathbb{Z}[w] \longrightarrow a(kP_1) \, , \quad x \longmapsto \mathrm{res}^P_{P_1} x$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus. Also ist der Grad des Minimalpolynoms von w größer oder gleich p. Es wird gezeigt, daß w eine Nullstelle des Minimalpolynoms f von T_2 ist. Dann ist f auch auch das Minimalpolynom von w, d.h. ψ ist ein Isomorphismus.

Es sei $x \in a(kP)$. Da $a(kP) = a(kP_{d-1})[w]$ ist, ist $\{T_j \, w^n \mid 1 \le j \le q, 0 \le n < p\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $a(kP)$. Es kann also ohne Einschränkung $x = ab$ mit $a \in a(kP_{d-1})$ und $b \in \mathbb{Z}[w]$ angenommen werden. Mit Lemma 3.25 und Bemerkung 1.1, (iv), erhält man

$$\begin{aligned} \langle 1, f(w)\, b \rangle = \langle T_q, 1 \rangle \langle 1, f(w)\, b \rangle = \langle T_q, f(w)\, b \rangle = \langle \mathrm{ind}^P_{P_1} T_1, f(w)\, b \rangle \\ = \langle 1, \mathrm{res}^P_{P_1} (f(w)\, b) \rangle = \langle 1, f(T_2)\, \mathrm{res}^P_{P_1} b \rangle = 0 \end{aligned}$$

und

$$\langle f(w), x \rangle = \langle a, f(w)\, b \rangle = \langle a, 1 \rangle \langle 1, f(w)\, b \rangle = 0 \, .$$

Da x beliebig gewählt war, ist $f(w) = 0$. □

Aus Satz 3.26 folgt

$$A(kP) = A(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[w] \, , \quad A(kP_1) \cong \mathbb{C}[w] \, .$$

Dieses Ergebnis läßt sich auch aus [Gr62] ableiten. Die Tensorproduktformeln, die dort berechnet wurden, implizieren $A(kP) = A(kP_{d-1})[T_{q+1}-T_{q-1}]$ ([Gr62], Thrm. 3). Da für $z = T_q - T_{q-1} \in A(kP_{d-1})$ die Gleichungen $w = (T_{q+1} - T_{q-1})z$ und $T_{q+1} - T_{q-1} = wz$ gelten, ist dann $A(kP) = A(kP_{d-1})[w]$. Aus den Spezieswerten von $T_{q+1}-T_{q-1}$ und z, welche in [Gr62], (2.10), berechnet wurden, folgt, daß die Spezieswerte von w mit denen von T_2 übereinstimmen. Somit ist w eine Nullstelle des Minimalpolynoms von T_2. Da $\mathrm{res} : \mathbb{C}[w] \longrightarrow \mathbb{C}[T_2]$ ein Epimorphismus ist, gilt $A(kP_1) = \mathbb{C}[T_2] \cong \mathbb{C}[w]$ und $A(kP) \cong A(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{C}} A(kP_1)$.

Lemma 3.27. *Es sei $D \leq P$ und $I_D = A(kP, D)$.*

(i) Es gilt

$$I_D = A(kP)\, e_D = \mathrm{ind}_D^P\, A(kD) = \bigoplus_{m=1}^{|D|} \mathbb{C}\, T_{(P:D)m}$$

mit $e_D = \frac{1}{(P:D)}\, T_{(P:D)}$. Die Spezies von I_D sind

$$u \circ \mathrm{res}_D^P : I_D \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad T_{(P:D)m} \longmapsto (P:D)\, u(T_m)\,, \quad u \in \mathrm{Sp}(A(kD))\,.$$

Es ist $u \circ \mathrm{res}_D^P = u' \circ \mathrm{res}_D^P$ genau dann, wenn $u = u'$ ist.

(ii) Es sei $s \in \mathrm{Sp}(A(kP))$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Die Spezies s hat Vertex D.

(2) Es ist $s \mid I_D \neq 0$ und $s \mid I_Q = 0$ für alle $Q < D$.

(3) Es gilt $s = u \circ \mathrm{res}_D^P$ mit $u \in \mathrm{Sp}(A(kD), D)$.

(4) Es gilt $s(T_{(P:D)}) = (P:D)$ und $s(T_{(P:Q)}) = 0$ für alle $Q < D$.

Beweis. Die erste Aussage von (i) ist eine Folgerung aus Lemma 2.5 und Korollar 3.11. Die zweite Aussage von (i) folgt aus (1.2) und Lemma 2.4. Teil (ii) folgt unmittelbar aus Teil (i) bzw. Korollar 3.13. □

Im nächsten Lemma werden die Spezies und Idempotente von $A(kD)$ mit Vertex D explizit angegeben. Variiert man D, so bekommt man alle Spezies und Idempotente von $A(kP)$ (Satz 3.29).

Lemma 3.28. *Es sei $1 \leq D' < D \leq P$ mit $(D : D') = p$, $q = |D'|$ und $w = 1 - 2\,T_{2q-1} + T_{2q} \in A(kD)$.*

(i) Die Spezies von $A(kD)$ sind

$$u_{t,\gamma} : A(kD) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad u_{t,\gamma}|A(kD') = t\,, \quad u_{t,\gamma}(w) = \gamma + \gamma^{-1}$$

mit $t \in \mathrm{Sp}\big(A(kD')\big)$ und $\gamma \in U_{2p}\backslash\{-1\}$. Die Spezies $u_{t,\gamma}$ hat genau dann Vertex D, wenn t Vertex D' hat.

(ii) *Es sei* $u := u_{t,\gamma}$ *eine Spezies von* $A(kD)$ *mit Vertex* D *und* $\beta := \gamma + \gamma^{-1}$ *. So ist*

$$\begin{aligned} u(T_{q+1}) &= (1-\beta)\, t(T_{q-1}) \\ u(T_{mq+1}) &= -\beta\, t(T_{q-1})\, u(T_{(m-1)q+1}) - u(T_{(m-2)q+1})\,, \quad 2 \le m \le p-1 \\ u(T_{mq+j}) &= u(T_{mq+1})\, t(T_j)\,, \quad 1 \le m \le p-1\,, \quad 1 \le j \le q \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $p = 2$

$$u(T_{q+j}) = \begin{cases} t(T_j) & \text{falls } \beta = 0 \\ -t(T_j) & \text{falls } \beta = 2 \end{cases}.$$

(iii) *Es seien* $\{e_t\}$ *und* $\{f_\gamma\}$ *die primitiven Idempotente von* $A(kD')$ *bzw.* $\mathbb{C}[w]$ *. Die primitiven Idempotente von* $A(kD)$ *sind*

$$e_u := e_{t,\gamma} := e_t \cdot f_\gamma = \frac{1}{\eta_u} \sum_{i=1}^{|D|} u(\hat{T}_i)\, T_i\,, \quad u := u_{t,\gamma} \in \operatorname{Sp}\big(A(kD)\big)\,.$$

Außerdem ist $\eta_u = \eta_t \cdot \eta_\gamma$ *.*

(iv) *Es sei* $p \neq 2$ *und* u *eine Spezies von* $A(kD)$ *mit Vertex* D *,*

$$x_u := \sum_{i \in \{1,\ldots,|D|\}, p \nmid i} u(T_i)\, T_i = \sum_{i=1}^{|D|} u(T_i)\, T_i = \sum_{m=0}^{p-1} u(T_{mq+1}) \sum_{j=0}^{q-1} t(T_j)\, T_{mq+j}$$

und

$$y_u := \Big(\sum_{m=1}^{q} (u(T_{mp-1}) + u(T_{mp+1}))\, T_{mp} \Big) + u(T_{pq-1}) T_{pq} \in A(kD, D')\,.$$

Dann ist

$$e_u = \frac{1}{\eta_u}((2 - u(T_2)) x_u - y_u)\,.$$

Beweis. Da $A(kD) = A(kD') \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[w]$ und $\mathbb{C}[w] \cong A(kP_1)$ ist, sind $u_{t,\gamma}$ die Spezies und $e_t \cdot f_\gamma$ die primitiven Idempotente von $A(kD)$. Die Spezies $u := u_{t,\gamma}$ hat genau dann Vertex D, wenn $u(T_p) = 0$ ist. Genau dann ist $t(T_p) = 0$. Genau dann hat t Vertex D'.

Es gelten die Voraussetzungen von Teil (ii). Da $T_{q+1} = (1-w)\, T_{q-1} + w\, T_q$ und $u(T_q) = 0$ ist, ist $u(T_{q+1}) = (1-\beta)\, t(T_{q-1})$. Aus den Formeln (3.8) folgen die Spezieswerte für T_{mq+1} und T_{mq+j}.

Teil (i) zeigt, daß die Spezieswerte von T_i, $1 \leq i \leq p^d$, im Ring $\mathcal{O}_L$ liegen (siehe Seite 62). Damit sind die Voraussetzungen von Satz 3.18 zur Berechnung der Idempotenten erfüllt. Wegen Satz 3.18 ist $e_u = \frac{1}{\eta_u} \sum_{i=1}^{|D|} u(\hat{T}_i) T_i$. Nach Lemma 3.25 ist $\frac{1}{\eta_u} = \langle e_u, 1\rangle = \langle e_t, f_\gamma\rangle = \langle e_t, 1\rangle\langle 1, f_\gamma\rangle = \frac{1}{\eta_t\eta_\gamma}$, also $\eta_u = \eta_t\eta_\gamma$.

Es sei $p \neq 2$ und $1 \leq i \leq q-1$. Gilt $p \nmid i$, so ist $\hat{T}_i = 2\,T_i - T_{i-1} - T_{i+1} = (2-T_2)\,T_i$. Wird i von p geteilt, so ist $u(T_i) = 0$ und $u(\hat{T}_i) = u(2\,T_i - T_{i-1} - T_{i+1}) = -(u(T_{i-1} + T_{i+1}))$. Außerdem ist $u(\hat{T_{pq}}) = u(T_{pq} - T_{pq-1}) = -u(T_{pq-1})$. Damit und mit Teil (ii) wird (iv) bewiesen. □

Satz 3.29. *Es gelten die Bezeichnungen von Lemma 3.28 Die Spezies von $A(kP)$ sind*

$$s_{D,u} := s_{D,t,\gamma} = u_{t,\gamma} \circ \mathrm{res}^P_D\,, \quad D \leq P\,, \quad u := u_{t,\gamma} \in \mathrm{Sp}(A(kD), D)\,.$$

Die primitiven Idempotente von $A(kP)$ sind

$$e_{D,u} := \tfrac{1}{(P:D)} \mathrm{ind}^P_D\, e_u\,, \quad D \leq P\,, \quad u \in \mathrm{Sp}(A(kD), D)\,.$$

Beweis. Die Aussage über die Spezies folgt aus Lemma 3.27 und Lemma 3.28. Es seien D, D' Untergruppen von P , $u \in \mathrm{Sp}(A(kD), D)$ und $u' \in \mathrm{Sp}(A(kD'), D')$. Da $\mathrm{ind}^P_D\, T_j = T_{(P:D)j}$ relativ D-projektiv für alle $1 \leq j \leq |D|$ ist, ist $s_{D',u'}(e_{D,u}) = 0$, falls $D' > D$ ist. Es sei $D' \leq D$. Da $\mathrm{res}^P_D\, \mathrm{ind}^P_D\, T_j = (P:D)\, T_j$ ist, gilt

$$\mathrm{res}^P_{D'}\, e_{D,u} = (\mathrm{res}^D_{D'} \circ \mathrm{res}^P_D)(e_{D,u}) = \mathrm{res}^D_{D'}\, e_u\,.$$

Ist $D' = D$, so ist $s_{D',u'}(e_{D,u}) = u'(\mathrm{res}^P_{D'}\, e_{D,u}) = u'(e_u) = \delta_{uu'}$. Ist $D' < D$, so ist $e_u \notin A(kD, D') = \mathrm{ind}^{D'}_D\, A(kD', D')$. Nach Bemerkung 1.15 ist $e_u \in \ker \mathrm{res}^D_{D'}$. Dann ist $s_{D',u'}(e_{D,u}) = u'(\mathrm{res}^P_{D'}\, e_u) = u'(\mathrm{res}^D_{D'}\, e_u) = u'(0) = 0$. Damit ist $s_{D',u'}(e_{D,u}) = \delta_{DD'}\,\delta_{uu'}$ gezeigt. □

Wie man sieht, werden die Spezies von $A(kP)$ rekursiv aus den Spezies von Unteralgebren $A(kD)$ konstruiert. Zwei verschiedene Arten der Parametrisierung wurden vorgestellt. Bei Satz 3.29 zeigt der erste Parameter den Vertex der Spezies an und der zweite eine Spezies einer Unteralgebra mit diesem Vertex. Bei Lemma 3.28 sind es zwei Spezies von $A(kP_{d-1})$ und $A(kP_1)$ aus denen sich die Spezies von $A(kP)$ zusammensetzt. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird jeweils die Parametrisierung gewählt, die günstiger ist.

Beispiel 3.30. Es sei $P = C_9$. Die Speziestafel für $D := P_1 = C_3$ ist

	T_1	T_2	T_3
t_1	1	2	3
t_ζ	1	−1	0
$t_{(-\zeta)}$	1	1	0

Ferner ist:

T_j	$\operatorname{res}^P_D T_j$
T_1	T_1
T_2	$2\,T_1$
T_3	$3\,T_1$
T_4	$2\,T_1 + T_2$
T_5	$T_1 + 2\,T_2$
T_6	$3\,T_2$
T_7	$2\,T_2 + T_3$
T_8	$T_2 + 2\,T_3$
T_9	$3\,T_3$

Mit diesen beiden Tabellen werden die Spezies mit Vertex kleiner P berechnet. Die Spezies $s = s_{P,t,\gamma}$ wird mit den folgenden Formeln berechnet:

$$\begin{aligned} s(T_4) &= (1-\beta)\,t(T_2) \\ s(T_5) &= s(T_4)\,t(T_2) \\ s(T_7) &= -\beta\,t(T_2)\,s(T_4) - 1 \\ s(T_8) &= s(T_7)\,t(T_2) \end{aligned}$$

mit $\beta = \gamma + \gamma^{-1}$.
Daraus ergibt sich die Speziestafel für P:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
s_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_{D,1,\zeta} = t_\zeta \circ \operatorname{res}^P_D$	1	2	3	1	−1	−3	−2	−1	0
$s_{D,1,-\zeta} = t_{(-\zeta)} \circ \operatorname{res}^P_D$	1	2	3	3	3	3	2	1	0
$s_{P,t_\zeta,1}$	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0
$s_{P,t_\zeta,\zeta}$	1	−1	0	−2	2	0	1	−1	0
$s_{P,t_\zeta,-\zeta}$	1	−1	0	0	0	0	−1	1	0
$s_{P,t_{(-\zeta)},1}$	1	1	0	−1	−1	0	1	1	0
$s_{P,t_{(-\zeta)},\zeta}$	1	1	0	2	2	0	1	1	0
$s_{P,t_{(-\zeta)},-\zeta}$	1	1	0	0	0	0	−1	−1	0

Im Beispiel 3.20 wurden die primitiven Idempotente von $A(kD)$ angegeben. Nach Satz 3.29 sind dann

$$\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{9}\,T_9 \\ e_{D,1,\zeta} &= \tfrac{1}{18}\,(3\,T_3 - 3\,T_6 + T_9) \\ e_{D,1,-\zeta} &= \tfrac{1}{6}\,(T_3 + T_6 - T_9) \end{aligned}$$

die primitiven Idempotente von $A(kP,D)$. Es gilt

$$e_D = e_1 + e_{D,1,\zeta} + e_{D,1,-\zeta} = \tfrac{1}{3}\,T_3\,.$$

Die primitiven Idempotente mit Vertex P bekommt man mit Lemma 3.28 oder durch Invertieren der Speziestafel von $A(kP)$.

$$\begin{aligned}
e_{P,t_\zeta,1} &= \tfrac{1}{18}\,(3\,T_1 - 3\,T_2 + 3\,T_4 - 3\,T_5 + 3\,T_7 - 3\,T_8 + T_9)\\
e_{P,t_\zeta,\zeta} &= \tfrac{1}{36}\,(3\,T_1 - 3\,T_2 + 3\,T_3 - 6\,T_4 + 6\,T_5 - 3\,T_6 + 3\,T_7 - 3\,T_8 + T_9)\\
e_{P,t_\zeta,-\zeta} &= \tfrac{1}{12}\,(3\,T_1 - 3T_2 + T_3 + T_6 - 3\,T_7 + 3\,T_8 - T_9)\\
e_{P,t_{(-\zeta)},1} &= \tfrac{1}{6}\,(T_1 + T_2 - T_4 - T_5 + T_7 + T_8 - T_9)\\
e_{P,t_{(-\zeta)},\zeta} &= \tfrac{1}{12}\,(T_1 + T_2 - 3\,T_3 + 2\,T_4 + 2\,T_5 - 3\,T_6 + T_7 + T_8 - T_9)\\
e_{P,t_{(-\zeta)},-\zeta} &= \tfrac{1}{4}\,(T_1 + T_2 - T_3 + T_6 - T_7 - T_8 + T_9)
\end{aligned}$$

Die primitiven Idempotente von $A(kD)$ mit Vertex D sind

$$\begin{aligned}
e_\zeta &= e_{P,t_\zeta,1} + e_{P,t_\zeta,\zeta} + e_{P,t_\zeta,-\zeta} = \tfrac{1}{6}(3\,T_1 - 3\,T_2 + T_3)\\
e_{(-\zeta)} &= e_{P,t_{(-\zeta)},1} + e_{P,t_{(-\zeta)},\zeta} + e_{P,t_{(-\zeta)},-\zeta} = \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2 - T_3)
\end{aligned}$$

3.4 Die Spezies und Idempotente von $A(kG)$ (Teil II)

Aus den Spezies von $A(kP)$ und den Spezies des Trivial-Source-Rings werden nun die Spezies von $A(kG)$ zusammengesetzt. Zunächst werden die Spezies von $A(k\langle D,c\rangle)$ mit Vertex $D \le P$ explizit angegeben (Satz 3.31). Aus ihnen werden die Spezies und Idempotente von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D berechnet (Korollar 3.32). Daraus werden schließlich die Spezies und Idempotente von $A(kG)$ abgeleitet (Satz 3.35).

Es sei $1 \ne D \le P$ und $\tau \in N_G(P)$ mit $N_G(D)/C_G(D) = \langle \tau C_G(D)\rangle$ (siehe Lemma 2.17). Die Funktion β wird folgendermaßen definiert:

$$\beta : N_G(D)_{p'} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \tau \longmapsto \sqrt{\alpha(\tau)}\,, \quad c \longmapsto 1\,, \quad c \in C_G(D)\,.$$

Dabei wird die Quadratwurzel beliebig gewählt. Ist $\tau \in C_G(D)$, so sei $\beta(\tau) = 1$. Die Funktion β ist wohldefiniert, aber kein Homomorphismus. Denn sonst wäre β die Inflation eines Charakters von $N_G(D)/C_G(D)$ der Ordnung $2e$. Da α ein Gruppenhomomorphismus ist, ist

$$\beta(g)^n \in \{\beta(g^n), -\beta(g^n)\}$$

für $g \in N_G(D)_{p'}$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $D = 1$ sei β der triviale Brauercharakter von G.

Satz 3.31. *Es sei $D \leq P$ und $c \in N_G(D)_{p'}$. Die Spezies von $A(k\langle D, c\rangle)$ mit Vertex D sind*

$$u_{D,c',t} : A(k\langle D, c\rangle) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad Z_{\varphi,j} \longmapsto \varphi(c')\,\beta(c')^{j-1}\,t(T_j)\,,$$

wobei t eine Spezies von $A(kD)$ mit Vertex D, $c' \in \langle c\rangle$, $\varphi \in \operatorname{Irr}(\langle c\rangle)$ und $1 \leq j \leq |D|$ ist. Es gilt

$$u_{D,c',t} \mid A(k\langle D, c\rangle, \mathrm{Triv}) = u_{D,c'}\,.$$

Beweis. Die zweite Behauptung ist offensichtlich richtig. Es sei $t \in \operatorname{Sp}(A(kD, D))$, $c' \in \langle c\rangle$ und $u := u_{D,c',t}$ wie oben definiert. Es soll gezeigt werden, daß u eine Spezies ist. Im Unterkapitel 3.3 wurde gezeigt, daß die Multiplikation im Ring $a(kP)$ durch die Relationen von Satz 2.9 vollständig beschrieben wird. Es sei $T_j \cdot T_r = \sum_{i=1}^{j} T_{\lambda_i}$ mit $j \leq r$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_j$ eine dieser Relationen. Nach Bemerkung 2.11 ist dann $\lambda_i = j + r + 1 - 2i$, falls λ_i nicht von p geteilt wird. Wegen Korollar 2.19 ist $Z_{1,j} \cdot Z_{1,r} = \sum_{i=1}^{j} Z_{\alpha^{i-1},\lambda_i}$. Da $A(k\langle D, c\rangle)$ von $Z_{1,n}$ mit $1 \leq n \leq |D|$ und F_φ mit $\varphi \in \operatorname{Irr}(\langle c\rangle)$ erzeugt wird, genügt es nachzuweisen, daß $u(Z_{1,j})\cdot u(Z_{1,r}) = u(Z_{1,j}\cdot Z_{1,r})$ und $u(Z_{1,n}) \cdot u(F_\varphi) = u(Z_{1,n} \cdot F_\varphi)$ für alle $n \in \{1, \ldots, |D|\}$ und $\varphi \in \operatorname{Irr}(\langle c\rangle)$ gilt.

Nach Definition von u ist

$$u(Z_{\alpha^{i-1},\lambda_i}) = \alpha(c')^{i-1}\,\beta(c')^{\lambda_i - 1}\,t(T_{\lambda_i}) = \beta(c')^{\lambda_i + 2i - 3}\,t(T_{\lambda_i})$$

für $1 \leq i \leq j$. Da t Vertex D hat, ist $t(T_{\lambda_i}) = 0$, falls λ_i von p geteilt wird. Wird λ_i nicht von p geteilt, so ist wie oben erwähnt wurde $\lambda_i = j + r + 1 - 2i$. In beiden Fällen ist also

$$u(Z_{\alpha^{i-1},\lambda_i}) = \beta(c')^{j+r-2}\,t(T_{\lambda_i})$$

für $1 \leq i \leq j$. Weiterhin ist $u(Z_{1,j})\cdot u(Z_{1,r}) = \beta(c')^{j+r-2}\,t(T_j)\,t(T_r) = \beta(c')^{j+r-2}\,t(T_j\cdot T_r)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} u(Z_{1,j}) \cdot u(Z_{1,r}) = \beta(c')^{j+r-2}\,t(T_j \cdot T_r) &= \sum_{i=1}^{j} \beta(c')^{j+r-2}\,t(T_{\lambda_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{j} u(Z_{\alpha^{i-1},\lambda_i}) = u(Z_{1,j} \cdot Z_{1,r})\,. \end{aligned}$$

Ferner gilt $u(Z_{1,n}) \cdot u(F_\varphi) = u(Z_{\varphi,n}) = u(Z_{1,n} \cdot F_\varphi)$. Hiermit ist gezeigt, daß u eine Spezies ist. Da t Vertex D hat, hat auch u Vertex D.

Es sei $u' = u_{D,c'',t'}$ mit $t' \in \operatorname{Sp}(A(kD))$ und $c'' \in \langle c\rangle$. Es sei $u = u'$. Dann ist $\varphi(c') = u(F_\varphi) = u'(F_\varphi) = \varphi(c'')$ für alle $\varphi \in \operatorname{Irr}(\langle c\rangle)$. Also ist $c' = c''$. Außerdem ist $t(T_j) = \beta(c')^{1-j}\,u(Z_{1,j}) = \beta(c'')^{1-j}\,u'(Z_{1,j}) = t'(T_j)$ für alle $1 \leq j \leq |D|$. Somit gilt $t = t'$. Also gibt es genau $m := |\operatorname{ord}(c)| \cdot |\operatorname{Sp}\big(A(kD), D\big)|$ Spezies von $A(k\langle D, c\rangle)$ dieser Art. Da es genau m verschiedene $k\langle D, c\rangle$-Moduln mit Vertex D gibt, sind dies alle Spezies von $A(k\langle D, c\rangle)$ mit Vertex D. □

Die Quadratwurzel $\beta(\tau) = \sqrt{\alpha(\tau)}$ wurde beliebig gewählt. Wählt man stattdessen $\beta(\tau) = -\sqrt{\alpha(\tau)}$, so ändert sich die Parametrisierung der Spezies von $A(k\langle D, c\rangle)$. Aus der Spezies $u_{D,c',t}$ wird die Spezies u_{D,c',t^*}, wobei $t^* \in \mathrm{Sp}\big(A(kD), D\big)$ die Bedingung

$$t^*(T_j) = (-1)^{j-1} t(T_j)$$

für $1 \le j \le |D|$ erfüllt.

Um die primitiven Idempotente von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D angeben zu können, müssen einige Vorbereitungen getroffen werden. Es sei $f_D \in A(kN_G(D), \mathrm{Triv})$ mit

$$A'(kN_G(D), D) = A(kN_G(D))\, f_D\,.$$

Ist $D = 1$, so ist $f_D = 0$. Ist $D > 1$, so ist $A'(kN_G(D), D) = A(kN_G(D), D')$ mit $D' < D$ und $(D : D') = p$. Aus Korollar 3.9 folgt

$$f_D = V_{1,p} + \tfrac{1}{e}\big(\tfrac{1}{(P:D')} - 1\big) \sum_{i=1}^{e} V_{\alpha^{i-1},p}$$

(vgl. Korollar 3.11). Ferner sei $N = N_G(D)$ und

$$\lambda(D, c, t) := \frac{1}{\eta_t\, |C_{N/D}(cD)|} \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N)} \sum_{j \in \{1,\dots,|D|\}, p \nmid j} t(\hat{T}_j)\, \varphi(c^{-1})\, \beta(c)^{1-j}\, V_{\varphi,j}$$

mit $c \in N_{p'}$ und $t \in \mathrm{Sp}\big(A(kD), D\big)$. Für $p \neq 2$ ist

$$\lambda(D, c, t) = \frac{2 - t(T_2)}{\eta_t\, |C_{N/D}(cD)|} \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(N)} \sum_{j=1}^{|D|} t(T_j)\, \varphi(c^{-1})\, \beta(c)^{1-j}\, V_{\varphi,j}\,.$$

(vgl. Lemma 3.28). Schließlich sei

$$e_{D,c,t} = \lambda(D, c, t)\, (1 - f_D)\,.$$

Im Ring $\overline{A}(kN_G(D), D)$ gilt also

$$\overline{e_{D,c,t}} = \overline{\lambda(D, c, t)}\,.$$

Das nächste Korollar zeigt, daß die $e_{D,c,t}$ die primitiven Idempotente von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D sind.

Korollar 3.32. *Es sei $D \leq P$ und $\mathcal{C}$ ein Vertretersystem der p'-Konjugationsklassen von $N_G(D)$.*

(i) Die Spezies von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D sind

$$s_{D,c,t} = u_{D,c,t} \circ \operatorname{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}\,, \quad c \in \mathcal{C}\,, \quad t \in \operatorname{Sp}\big(A(kD), D\big)\,.$$

Es gilt $s_{D,c,t} = s_{D,c',t'}$ genau dann, wenn $c = c'$ und $t = t'$ ist. Außerdem ist

$$s_{D,c,t} \mid A(kN_G(D), \operatorname{Triv}) = s_{D,c}\,.$$

(ii) Es gilt

$$s_{D,c,t}(V_{\varphi,j}) = s_{D,c}(V_{\varphi,1}) \cdot t(T_j) \cdot \beta(c)^{j-1}$$

für $\varphi \in \operatorname{IBr}(N_G(D))$ und $1 \leq j \leq |D|$.

(iii) Die primitiven Idempotente von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D sind

$$e_{D,c,t}\,, \quad c \in \mathcal{C}\,, \quad t \in \operatorname{Sp}\big(A(kD), D\big)\,.$$

Beweis. Es sei s eine Spezies von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D . Dann gibt es ein $c \in \mathcal{C}$, so daß $\langle D, c\rangle$ ein Ursprung von s ist. Also gilt $s = u \circ \operatorname{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}$ mit einer Spezies u von $A(k\langle D, c\rangle)$ mit Ursprung $\langle D, c\rangle$. Nach Korollar 3.15 ist $s|A(kN_G(D), \operatorname{Triv}) = s_{D,c}$ und $u|A(k\langle D, c\rangle, \operatorname{Triv}) = u_{D,c}$. Nach Satz 3.31 ist $u = u_{D,c,t}$ für eine Spezies t von $A(kD)$ mit Vertex D . Aus Satz 3.4 und Satz 3.31 folgt (ii).

Die zweite Behauptung von (i) ist richtig für $D = 1$. Es sei $D > 1$, $c' \in \mathcal{C}$ und $t' \in \operatorname{Sp}\big(A(kD), D\big)$. Es gelte $s_{D,c,t} = s_{D,c',t'}$. Dann ist $s_{D,c} = s_{D,c'}$, also $c = c'$. Da $s_{D,c}(V_{1,1}) \neq 0$ ist (Korollar 3.10), ist

$$t(T_j) = s_{D,c,t}(V_{1,j})\, s_{D,c}(V_{1,1})^{-1}\, \beta(c)^{1-j} = s_{D,c',t'}(V_{1,j})\, s_{D,c'}(V_{1,1})^{-1}\, \beta(c')^{1-j} = t'(T_j)$$

für alle $j \in \{1, \ldots, |D|\}$. Deshalb ist auch $t = t'$.

Es sei $s = s_{D,c,t}$ und $e = e_{D,c',t'}$ mit $t' \in \operatorname{Sp}(A(kD), D)$ und $c' \in \mathcal{C}$. Es soll gezeigt werden, daß e ein primitives Idempotent von $A(kN_G(D))$ ist. Da $e \in A(kN_G(D), D)$ und $e \cdot f_D = 0$ ist, hat e gegebenenfalls Vertex D und es genügt zu zeigen, daß $s(e) = \delta_{cc'tt'}$ ist. Da t Vertex D hat, ist $t(T_j) = 0$, falls j von p geteilt wird. Nach (ii) ist dann

$$\begin{aligned} s(\lambda(D, c', t')) = & \frac{1}{\eta_t\, |C_{N/D}(c'D)|} \sum_{\varphi \in \operatorname{IBr}(N)} \varphi((c')^{-1})\, s_{D,c}(V_{\varphi,1}) \\ & \times \sum_{j=1}^{|D|} t'(\hat{T}_j)\, t(T_j)\, (\beta(c')\, \beta(c)^{-1})^{1-j}\,. \end{aligned}$$

Es sei $\lambda(D,c)$ wie im Satz 3.5 definiert. Somit ist

$$s(\lambda(D,c',t')) = \frac{1}{\eta_t} s_{D,c}(\lambda(D,c')) \sum_{j=1}^{|D|} t'(\hat{T}_j)\, t(T_j)\, (\beta(c')\,\beta(c)^{-1})^{1-j}\,.$$

Ist $c \neq c'$, dann ist $s_{D,c}(\lambda(D,c')) = 0$ und somit $s(\lambda(D,c',t')) = 0$. Es sei nun $c = c'$. Dann ist $s_{D,c}(\lambda(D,c')) = 1$ und $\beta(c')\,\beta(c)^{-1} = 1$. Also ist

$$s(\lambda(D,c',t')) = \frac{1}{\eta_t} \sum_{j=1}^{|D|} t'(\hat{T}_j)\, t(T_j) = t(e_{t'}) = \delta_{tt'}$$

(Lemma 3.28). Deshalb gilt $s(\lambda(D,c',t')) = \delta_{cc'tt'}$. Da $s(f_D) = 0$ ist, ist $s(e) = s(\lambda(D,c',t')) = \delta_{cc'tt'}$. $\square$

Korollar 3.33. *Es seien $Q \leq D \leq P$,$c \in C_G(D)$ und $t \in \mathrm{Sp}\big(A(kD), D\big)$. Dann ist*

$$\begin{aligned}\big(u_{Q,c,t} \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle Q,c\rangle}\big)(V_{\varphi,j}) &= s_{D,c}(V_{\varphi,1}) \cdot \big(t \circ \mathrm{res}^{D}_{Q}\big)(T_j)\,,\\ \big(u_{Q,c,t} \circ \mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle}\big)(Z_{\chi,j}) &= \chi(c) \cdot \big(t \circ \mathrm{res}^{D}_{Q}\big)(T_j)\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D)/D)$, $\chi \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle)$ und $1 \leq j \leq |D|$.

Beweis. Nach Korollar 2.24 ist

$$\begin{aligned}\big(u_{Q,c,t} \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle Q,c\rangle}\big)(V_{\varphi,j}) &= \big(u_{Q,c,t} \circ \mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} \circ \mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle}\big)(V_{\varphi,j})\\ &= \big(u_{Q,c,t} \circ \mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle}\big)\big(\big(\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} V_{\varphi,1}\big) Z_{1,j}\big)\\ &= u_{Q,c,t}\big(\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle Q,c\rangle} V_{\varphi,1})\big) \cdot u_{Q,c,t}\big(\mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} Z_{1,j}\big)\,.\end{aligned}$$

Es sei $V = V_{\varphi,1}$. Da $\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle D,c\rangle} V$ halbeinfach ist und somit auch $\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle Q,c\rangle} V$ halbeinfach ist, gilt $u_{Q,c,t}\big(\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle Q,c\rangle} V\big) = \varphi_{\mathrm{res}^{N_G(D)}_{\langle Q,c\rangle} V}(c) = \varphi_V(c) = s_{D,c}(V_{\varphi,1})$. Da $c \in C_G(D)$ ist, ist $u_{Q,c,t}(Z_{\chi\alpha^n,m}) = \chi(c)\, t(T_m)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq m \leq |Q|$ (Satz 3.31). Aus Korollar 2.24 folgt $u_{Q,c,t}\big(\mathrm{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle} Z_{\chi,j}\big) = \chi(c)\,(t \circ \mathrm{res}^{D}_{Q})(T_j)$. $\square$

Beispiel 3.34. Es sei $p = 3$ und $G = S_3 = \langle\sigma,\tau\rangle$ mit $\sigma^3 = 1$ und $\tau^2 = 1$. Dann ist $P = \langle\sigma\rangle = A_3$, $G = N_G(P)$ und $N_G(P)/C_G(P) = \langle\tau P\rangle$. Also ist $e = \mathrm{ord}(\alpha) = 2$. Außerdem ist $\mathrm{IBr}(G) = \{1,\alpha\}$. Die Spezies von $A(kP)$ und die Brauercharaktere der nichteinfachen unzerlegbaren kG-Moduln werden in den folgenden zwei Tabellen aufgeführt.

	T_1	T_2	T_3
t_1	1	2	3
t_ζ	1	-1	0
$t_{(-\zeta)}$	1	1	0

M	φ_M
$V_{1,2}$	$1+\alpha$
$V_{\alpha,2}$	$1+\alpha$
U_1	$2+\alpha$
U_α	$1+2\alpha$

Aus der rechten Tabelle lassen sich die Brauerspezies ablesen. Die Spezies mit Vertex P bekommt man mit Hilfe der linken Tabelle und Satz 3.31.

	F_1	F_α	$V_{1,2}$	$V_{\alpha,2}$	U_1	U_α
$s_{1,1,\mathrm{id}}$	1	1	2	2	3	3
$s_{1,\tau,\mathrm{id}}$	1	-1	0	0	1	-1
$s_{P,1,t_\zeta}$	1	1	-1	-1	0	0
$s_{P,1,t_{(-\zeta)}}$	1	1	1	1	0	0
s_{P,τ,t_ζ}	1	-1	$-i$	i	0	0
$s_{P,\tau,t_{(-\zeta)}}$	1	-1	i	$-i$	0	0

Die primitiven Idempotente von $A(kG,1)$ sind

$$e_{1,1,\mathrm{id}} = \tfrac{1}{6}(U_1 + U_\alpha)\,, \quad e_{1,\tau,\mathrm{id}} = \tfrac{1}{2}(U_1 - U_\alpha)$$

(siehe Beispiel 3.8). Dann ist

$$e_1 = e_{1,1,\mathrm{id}} + e_{1,\tau,\mathrm{id}} = \tfrac{2}{3}\,U_1 - \tfrac{1}{3}\,U_\alpha\,.$$

Die primitiven Idempotente mit Vertex P erhält man mit Korollar 3.32 oder durch Invertieren der Speziestafel.

$$\begin{aligned}
e_{P,1,t_\zeta} &= \tfrac{1}{12}(3\,F_1 + 3\,F_\alpha - 3\,V_{1,2} - 3\,V_{\alpha,2} + U_1 + U_\alpha)\\
e_{P,1,t_{(-\zeta)}} &= \tfrac{1}{4}(F_1 + F_\alpha + V_{1,2} + V_{\alpha,2} - U_1 - U_\alpha)\\
e_{P,\tau,t_\zeta} &= \tfrac{1}{4}(F_1 - F_\alpha + i\,V_{1,2} - i\,V_{\alpha,2} - U_1 + U_\alpha)\\
e_{P,\tau,t_{(-\zeta)}} &= \tfrac{1}{4}(F_1 - F_\alpha - i\,V_{1,2} + i\,V_{\alpha,2} - U_1 + U_\alpha)
\end{aligned}$$

Die primitiven Idempotente des Trivial-Source-Rings mit Vertex P sind

$$\begin{aligned}
e_{P,1} &= e_{P,1,t_\zeta} + e_{P,1,t_{(-\zeta)}} = \tfrac{1}{2}(F_1 + F_\alpha) - \tfrac{1}{6}(U_1 + U_\alpha)\\
e_{P,\tau} &= e_{P,\tau,t_\zeta} + e_{P,\tau,t_{(-\zeta)}} = \tfrac{1}{2}(F_1 - F_\alpha) - \tfrac{1}{2}(U_1 - U_\alpha)
\end{aligned}$$

Die Idempotente von $A(kG)$ werden aus den Idempotenten des Trivial-Source-Rings und den Idempotenten von $A(kN_G(D))$ mit Vertex D mit Hilfe der Greenkorrespondenz zusammengesetzt. Dazu sei $N = N_G(D)$ und $\mu(D,c,t) = \mathrm{green}^G(\lambda(D,c,t))$, also

$$\mu(D,c,t) = \frac{1}{\eta_t\,|C_{N/D}(cD)|} \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(N)} \sum_{j\in\{1,\dots,|D|\},p\nmid j} t(\hat{T}_j)\,\varphi(c^{-1})\,\beta(c)^{1-j}\,M_{D,\varphi,j}$$

mit $c \in N_{p'}$ und $t \in \mathrm{Sp}\big(A(kD,D)\big)$.

Satz 3.35. *Es gelten die Bezeichnungen von Satz 3.31 und Korollar 3.32. Die Spezies von $A(kG)$ sind*

$$\tilde{s}_{D,c,t} = s_{D,c,t} \circ \mathrm{res}^G_{N_G(D)} = u_{D,c,t} \circ \mathrm{res}^G_{\langle D,c\rangle}\,,$$

wobei $D \leq P$, $c \in N_G(D)_{p'}$ und $t \in \mathrm{Sp}\big(A(kD), D\big)$ ist. Es gilt $\tilde{s}_{D,c,t} = \tilde{s}_{D',c',t'}$ genau dann, wenn $D = D'$, $c =_{N_G(D)} c'$ und $t = t'$ ist. Es gilt

$$\tilde{s}_{D,c,t} \mid A(kG, \mathrm{Triv}) = \tilde{s}_{D,c}\,.$$

Die primitiven Idempotente von $A(kG)$ sind

$$\begin{aligned}
&\tilde{e}_{1,c,t} = e_{1,c,t}\\
&\tilde{e}_{D,c,t} = (1 - \tilde{e}_{D'})\,\mu(D,c,t)\,, \quad 1 \leq D' < D \leq P\,, \quad (D : D') = p\,.
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Satz 3.2 sind $s \circ \mathrm{res}^G_{N_G(D)}$ mit $s \in \mathrm{Sp}\big(A(kN_G(D)), D\big)$ die Spezies von $A(kG)$ mit Vertex D. Nach Korollar 3.32 ist $s = s_{D,c,t}$ mit $c \in N_G(D)_{p'}$ und $t \in \mathrm{Sp}(A(kD), D)$. Außerdem gilt $s \circ \mathrm{res}^G_{N_G(D)} = s' \circ \mathrm{res}^G_{N_G(D)}$ genau dann, wenn $s = s'$ ist. Die weiteren Aussagen folgen aus Korollar 3.32. □

Für $D \leq P$ sei $\mathcal{C}_D$ ein Vertretersystem der p'-Konjugationsklassen von $N_G(D)$. Nach Satz 3.35 ist

$$A(kG) = \bigoplus_{D \leq P} \bigoplus_{c \in \mathcal{C}_D} \bigoplus_{t \in \mathrm{Sp}(A(kD),D)} \mathbb{C}\,\tilde{e}_{D,c,t}$$

eine Zerlegung von $A(kG)$ in Ideale. Es ist

$$\overline{A}(kG, D) = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}_D} \bigoplus_{t \in \mathrm{Sp}(A(kD),D)} \mathbb{C}\,\overline{\tilde{e}_{D,c,t}} = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}_D} \bigoplus_{t \in \mathrm{Sp}(A(kD),D)} \mathbb{C}\,\overline{\mu(D,c,t)}\,.$$

Dann ist

$$A(kG) \cong \bigoplus_{D \leq P} \overline{A}(kG, D) \cong \bigoplus_{D \leq P} \overline{A}(kN_G(D), D)\,.$$

Diese Isomorphie gilt auch für eine beliebige endliche Gruppe, wenn man über ein Vertretersystem der Konjugationsklassen der p-Untergruppen summiert ([Fei], Thrm IX 1.1). Da $\tilde{s}_{D,c,t}|A(kG,\mathrm{Triv}) = \tilde{s}_{D,c}$ ist, gilt

$$\tilde{e}_{D,c} = \sum_{t \in \mathrm{Sp}(A(kD),D)} \tilde{e}_{D,c,t}\,.$$

Ist H eine Untergruppe von G, so ist wegen (3.3)

$$\mathrm{ind}^G_H A(kH) = \bigoplus_{\langle D,c\rangle \leq H} \bigoplus_{t \in \mathrm{Sp}(A(kD),D)} \mathbb{C}\,\tilde{e}_{D,c,t}\,.$$

Die Parametrisierung (D,c,t) der Spezies von $A(kG)$ hängt von der Wahl der p-Sylowgruppe P ab. Startet man mit einer anderen p-Sylowgruppe ${}^gP$ mit $g \in G$, so erhält man eine Spezies

$$u_{({}^gD,{}^gc,\overline{t})} \in \mathrm{Sp}\left(A(k({}^g\langle D,c\rangle))\right).$$

Dabei erfüllt $\overline{t} \in \mathrm{Sp}(Ak({}^gD),{}^gD)$ die Gleichheit $\overline{t}({}^gT) = t(T)$ für alle $T \in A(k({}^gD))$. Die zur Konstruktion von $u_{({}^gD,{}^gc,\overline{t})}$ verwendete Funktion $\overline{\beta} : N_G({}^gD) \longrightarrow \mathbb{C}$ soll so gewählt werden, daß $\overline{\beta}({}^g\tau) = \beta(\tau)$ gilt. Für $\varphi \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle)$ sei $\overline{\varphi} \in \mathrm{Irr}(\langle {}^gc\rangle)$ mit $\overline{\varphi}({}^gc) = \varphi(c)$. Dann ist ${}^gZ_{\varphi,j} = Z_{\overline{\varphi},j} \in A(k({}^g\langle D,c\rangle))$ für $1 \le j \le |D|$. Somit gilt

$$u_{({}^gD,{}^gc,\overline{t})}({}^gZ_{\varphi,j}) = \overline{\varphi}({}^gc)\overline{\beta}({}^gc)^{j-1}\overline{t}(T_j) = \varphi(c)\beta(c)^{j-1}t(T_j) = u_{(D,c,t)}(Z_{\varphi,j}).$$

Für $M \in A(kG)$ ist ${}^gM = M$ und

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{({}^gD,{}^gc,\overline{t})}(M) &= \tilde{s}_{({}^gD,{}^gc,\overline{t})}(M) = u_{({}^gD,{}^gc,\overline{t})}\big(\mathrm{res}^G_{{}^g\langle D,c\rangle}\,{}^gM\big) = u_{({}^gD,{}^gc,\overline{t})}\big({}^g(\mathrm{res}^G_{\langle D,c\rangle}\,M)\big)\\ &= u_{(D,c,t)}\big(\mathrm{res}^G_{\langle D,c\rangle}\,M\big) = \tilde{s}_{(D,c,t)}(M).\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{s}_{({}^gD,{}^gc,\overline{t})} = \tilde{s}_{(D,c,t)}$.

Kapitel 4

Das Primspektrum

Bei den Untersuchungen im vorherigen Kapitel spielte der Wertebereich der Spezies eine untergeordnete Rolle. Als Koeffiezientenring wurde deshalb $\mathbb{C}$ gewählt. Nach den Ausführungen im ersten Kapitel liegen die Spezieswerte der unzerlegbaren kG-Moduln in einem Ganzheitsring eines algebraischen Zahlkörpers F (siehe Seite 21). Für einen solchen Körper F werden die Primideale und Idempotente von $A_{\mathcal{O}_F}(kG)$ sowie die Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Spec}(A_{\mathcal{O}_F}(kG))$ berechnet (Satz 4.19 und Korollar 4.21). Als Folgerung erhält man die Primideale und Idempotente von $a(kG)$ (Satz 4.23 und Korollar 4.22).

Nach wie vor gelten die in Kapitel 2 und Kapitel 3 vereinbarten Voraussetzungen und Bezeichnungen. Zusätzlich sei

$$X := \{(D, c, t) \mid D \leq P\,, c \in N_G(D)_{p'}\,, t \in \mathrm{Sp}(A(kD), D)\}$$

und

$$Y := \{(D, c) \mid D \leq P\,, c \in N_G(D)_{p'}\}\,.$$

4.1 Das Primspektrum von $a(kP)$

Bevor sich dieses Unterkapitel dem Primspektrum von $a(kP)$ widmet, wird ein Lemma bewiesen, welches auch im nächsten Unterkapitel verwendet wird. Dazu sei F ein algebraischer Zahlkörper, der die Spezieswerte von $a(kG)$ enthält. Die Galoisgruppe $G(F/\mathbb{Q})$ operiert auf den Spezies von $A_{\mathcal{O}_F}(kG) = \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} a(kG)$ folgendermaßen:

$$({}^{\sigma}s)(x \otimes y) := x \otimes (\sigma \circ s)(y)$$

mit $\sigma \in G(F/\mathbb{Q})$, $s \in \mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_F}(kG))$, $x \in \mathcal{O}_F$ und $y \in a(kG)$.

Lemma 4.1. *Es sei* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *mit* $x_1 = 1$ *eine* $\mathbb{Z}$*-Basis von* $a(kG)$.

(i) Die Primideale von $A_{\mathcal{O}_F}(kG)$ *sind*

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s) = s^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\, x_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} \mathcal{O}_F(x_i - s(x_i)\, x_1)$$

mit $s \in \mathrm{Sp}\left(A_{\mathcal{O}_F}(kG)\right)$ *und* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$.

(ii) Für $\sigma \in G(F/\mathbb{Q})$ *ist* $\sigma(\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s)) = \mathcal{P}(\sigma(\mathfrak{p}), {}^{\sigma}s)$.

Beweis. Nach Bemerkung 1.25 sind $s^{-1}(\mathfrak{p})$ mit $s \in \mathrm{Sp}\left(A_{\mathcal{O}_F}(kG)\right)$ und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ die Primideale von $A_{\mathcal{O}_F}(kG)$. Es sei $x \in A_{\mathcal{O}_F}(kG)$. So ist $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i$ mit eindeutig bestimmten $\lambda_i \in \mathcal{O}_F$. Dann ist $x = s(x)\, x_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i(x_i - s(x_i)\, x_1)$. Daraus folgt die zweite Gleichheit von (i). Aus (i) folgt unmittelbar (ii). □

Wie bisher sei auch in diesem Kapitel $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Ferner sei $L = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$. Im Unterkapitel 3.3 wurde gezeigt, daß die Spezieswerte von $a(kP)$ in $\mathcal{O}_L$ liegen. Es gilt $L = \mathbb{Q}$ genau dann, wenn $p \leq 3$ ist. Unter dem Aspekt der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ spielen deshalb die Fälle $p = 2$ und $p = 3$ eine Sonderrolle.

Beispiel 4.2. Es sei $p = 2$. Ferner seien $\{s_1, s_2\}$ die Spezies von $A_{\mathbb{Z}}(kP_1) = a(kP_1)$ wie auf Seite 60 definiert. Die Primideale von $a(kP_1)$ sind

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(q, s_1) &= q\,\mathbb{Z}\,T_1 \oplus \mathbb{Z}(T_2 - 2\,T_1)\,, \\ \mathcal{P}(q, s_2) &= q\,\mathbb{Z}\,T_1 \oplus \mathbb{Z}\,T_2\,, \\ \mathcal{P}(0, s_1) &= \mathbb{Z}(T_2 - 2\,T_1)\,, \\ \mathcal{P}(0, s_2) &= \mathbb{Z}\,T_1\,, \end{aligned}$$

mit einer Primzahl q . Wie man sieht, gilt $\mathcal{P}(q, s_1) = \mathcal{P}(q, s_2)$ genau dann, wenn $q = 2$ ist.

Beispiel 4.3. Es sei $p = 3$. Im Beispiel 3.20 wurden die Spezies von $a(kP_1)$ angegeben. Die Primideale von $a(kP_1)$ sind

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(q, s_1) &= q\,\mathbb{Z}\,T_1 \oplus \mathbb{Z}(T_2 - 2\,T_1) \oplus \mathbb{Z}(T_3 - 3\,T_1)\,, \\ \mathcal{P}(q, s_\zeta) &= q\,\mathbb{Z}\,T_1 \oplus \mathbb{Z}(T_2 + T_1) \oplus \mathbb{Z}\,T_3\,, \\ \mathcal{P}(q, s_{-\zeta}) &= q\,\mathbb{Z}\,T_1 \oplus \mathbb{Z}(T_2 - T_1) \oplus \mathbb{Z}\,T_3\,, \\ \mathcal{P}(0, s_1) &= \mathbb{Z}(T_2 - 2\,T_1) \oplus \mathbb{Z}(T_3 - 3\,T_1)\,, \\ \mathcal{P}(0, s_\zeta) &= \mathbb{Z}(T_2 + T_1) \oplus \mathbb{Z}\,T_3\,, \\ \mathcal{P}(0, s_{-\zeta}) &= \mathbb{Z}(T_2 - T_1) \oplus \mathbb{Z}\,T_3 \end{aligned}$$

mit einer Primzahl q. Ist $q = 2$, dann ist $\mathcal{P}(q, s_\zeta) = \mathcal{P}(q, s_{-\zeta})$. Ist $q = 3$, so ist $\mathcal{P}(q, s_1) = \mathcal{P}(q, s_\zeta)$. Für alle anderen Primzahlen q sind die Ideale verschieden. Nach Bemerkung 1.26 gelangt man auch zu diesem Ergebnis, wenn man die Speziestafel modulo q betrachtet.

mod 2	T_1	T_2	T_3
s_1	1	0	1
s_ζ	1	1	0
$s_{-\zeta}$	1	1	0

mod 3	T_1	T_2	T_3
s_1	1	2	0
s_ζ	1	1	0
$s_{-\zeta}$	1	2	0

Wie bereits im Kapitel 2 erwähnt wurde, ist L der größte reelle Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta)$. Die Primideale von $\mathcal{O}_L$ sind durch die Zerlegung der Primzahlen $q \in \mathbb{Z}$ gegeben:

$$q\mathcal{O}_L = (\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r)^e$$

mit paarweise verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_i$ von $\mathcal{O}_L$. Dabei sind r und e natürliche Zahlen, welche die Bedingung $\frac{p-1}{2} = [L : \mathbb{Q}] = r \cdot e \cdot f$ erfüllen. Hierbei ist f der Grad der Körpererweiterung $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}$ von $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, wobei $\mathfrak{p}$ eines der Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ ist. Die Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ sind genau die Primideale von $\mathcal{O}_L$, die q enthalten. Die Galoisgruppe $\mathcal{G} := G(L/\mathbb{Q})$ operiert transitiv auf der Menge $\{\mathfrak{p}_1 \dots, \mathfrak{p}_r\}$. Der Stabilisator eines Elementes $\mathfrak{p}$ unter $\mathcal{G}$ ist die *Zerlegungsgruppe*

$$\mathcal{G}_Z = \{\sigma \in \mathcal{G} \mid \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\}.$$

Die *Trägheitsgruppe*

$$\mathcal{G}_0 = \{\sigma \in \mathcal{G} \mid \sigma(\beta) \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}} \text{ für alle } \beta \in \mathcal{O}_L\}$$

ist eine Untergruppe on $\mathcal{G}_Z$. Diese Gruppen hängen nicht von der Wahl des Ideals $\mathfrak{p}$ ab. Es gilt

$$(\mathcal{G} : \mathcal{G}_Z) = r, \quad (\mathcal{G}_Z : \mathcal{G}_0) = f, \quad (\mathcal{G}_0 : 1) = e.$$

Ferner ist $e = \frac{p-1}{2}$, falls $q = p$ und $e = 1$, falls $q \neq p$ ist. Siehe dazu [Neu], Kap I.10.

Nach Satz 3.19 sind die Spezies von $A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)$ gegeben durch

$$s_\gamma : A_{\mathcal{O}_L}(kP_1) \longrightarrow \mathcal{O}_L, \quad T_2 \longmapsto \gamma + \gamma^{-1}, \quad \gamma \in U_{2p} \backslash \{-1\}.$$

Die Operation der Galoisgruppe auf der Menge der Spezies liefert für $p \neq 2$ drei Bahnen, welche von s_1, s_ζ und $s_{-\zeta}$ repräsentiert werden. Für $p = 2$ sind es zwei einelementige Bahnen. Gilt $s_{\gamma'} = {}^\sigma s_\gamma$ für $\sigma \in \mathcal{G}$, so ist $\gamma' + \gamma'^{-1} = \sigma(\gamma + \gamma^{-1})$.

Satz 4.4. *Es seien s_γ und $s_{\gamma'}$ Spezies von $A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)$ mit $\gamma, \gamma' \in U_{2p} \backslash \{-1\}$, $\gamma' \neq \gamma^{\pm 1}$ und $\gamma' \neq 1$. Ferner sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)$. Es gilt $s_\gamma \equiv s_{\gamma'} \pmod{\mathfrak{p}}$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

(1) Es ist $2 \in \mathfrak{p}$ und $\gamma' = -\gamma$.

(2) Es ist $2 \in \mathfrak{p}$ und $p = 2$.

(3) Es gilt $p \in \mathfrak{p}$ und $\gamma' + (\gamma')^{-1} = \sigma(\gamma + \gamma^{-1})$ für ein $\sigma \in \mathcal{G}$ mit $\sigma \neq 1$.

(4) Es ist $p \in \mathfrak{p}$, $\gamma = 1$ und $\gamma' \in U_p \backslash \{1\}$.

Beweis. Die Aussage des Satzes ist richtig für $\mathfrak{p} = 0$. Denn es ist $s_\gamma \neq s_{\gamma'}$ und für $\mathfrak{p} = 0$ trifft keine der vier Bedingungen zu. Deshalb sei $\mathfrak{p} \neq 0$. Die Beispiele 4.2 und 4.3 zeigen, daß die Behauptung für $p \leq 3$ richtig ist. Es sei $p > 3$, $s = s_\gamma$ und $t = s_{\gamma'}$. Da $A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)$ von T_2 erzeugt wird, gilt $s(x) \equiv t(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $x \in A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)$ genau dann, wenn $s(T_2) \equiv t(T_2) \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Es sei $\alpha = s(T_2) = \gamma + \gamma^{-1}$ und $\alpha' = t(T_2) = \gamma' + (\gamma')^{-1}$.

Gilt $\alpha' = \sigma(\alpha)$ für ein $\sigma \in \mathcal{G}$ mit $\sigma \neq 1$, so ist $\alpha \equiv \alpha' \pmod{\mathfrak{p}}$ gleichbedeutend mit $\alpha \equiv \sigma(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}}$. Da $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\zeta + \zeta^{-1}] = \mathbb{Z}[\alpha]$ ist, gilt genau dann $\sigma \in \mathcal{G}_0$. Da $\sigma \neq 1$ ist, ist genau dann $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ und $p \in \mathfrak{p}$.

Ist $\gamma \neq 1$ und $\alpha' \neq \sigma(\alpha)$ für alle $\sigma \in \mathcal{G}$, so ist $\alpha' = -(\sigma(\alpha))$ für ein $\sigma \in \mathcal{G}$. Dann ist $\alpha \equiv \alpha' \pmod{\mathfrak{p}}$ gleichbedeutend mit $\alpha \equiv -\sigma(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}}$, also $\alpha + \sigma(\alpha) \in \mathfrak{p}$. Die Fälle $\sigma = 1$ und $\sigma \neq 1$ werden getrennt betrachtet. Es sei $\sigma = 1$. Da α eine Einheit in $\mathcal{O}_L$ ist, ist $\alpha + \sigma(\alpha) = 2\alpha \in \mathfrak{p}$ genau dann, wenn $2 \in \mathfrak{p}$ ist. Nun sei $\sigma \neq 1$. Nach Bemerkung 3.23 ist $\alpha + \sigma(\alpha) \in \mathcal{O}_L^*$, also $\alpha + \sigma(\alpha) \notin \mathfrak{p}$.

Es sei $\gamma = 1$. Ohne Einschränkung sei $\gamma' = \zeta$ oder $\gamma' = -\zeta$. Im ersten Fall ist $\alpha \equiv \alpha' \pmod{\mathfrak{p}}$ genau dann, wenn $2 - \alpha' \in \mathfrak{p}$ ist. Da p in genau einem Primideal von $\mathcal{O}_L$ enthalten ist und $|N_{L/\mathbb{Q}}(2 - \alpha')| = p$ gilt (Bem. 3.23), ist genau dann $p \in \mathfrak{p}$. Auf ähnliche Weise zeigt man ebenfalls mit Bemerkung 3.23, daß der andere Fall nicht auftritt. Also gilt $s_1 \equiv s_{\gamma'} \pmod{\mathfrak{p}}$ genau dann, wenn $p \in \mathfrak{p}$ und γ' eine primitive p-te Einheitswurzel ist. □

Die Aussage des Satzes gilt auch für Primideale des Ganzheitsringes einer endlichen Körpererweiterung F/L. Ist nämlich $\mathfrak{P}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_F$ und q eine Primzahl, so gilt $q \in \mathfrak{P}$ genau dann, wenn $q \in \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_L =: \mathfrak{p}$ ist. Ferner ist $s \equiv t \pmod{\mathfrak{P}}$ genau dann, wenn $s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}}$ gilt.

Korollar 4.5. *Der topologische Raum $\operatorname{Spec}(A_{\mathcal{O}_L}(kP_1))$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)$ mit $p \in \mathfrak{p}$ und $2 \in \mathfrak{q}$. Nach Satz 4.4 gilt

$$s_1 \equiv s_\zeta \pmod{\mathfrak{p}}, \quad s_\zeta \equiv s_{(-\zeta)} \pmod{\mathfrak{q}}, \quad s_{(\pm\zeta)} \equiv {}^\sigma s_{(\pm\zeta)} \pmod{\mathfrak{q}}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{G}$. Wegen Bemerkung 1.27 sind s_1 und s_ζ zusammenhängend ($s_1 \sim s_\zeta$). Ebenfalls gilt $s_\zeta \sim s_{(-\zeta)}$ und $s_{(\pm\zeta)} \sim {}^\sigma s_{(\pm\zeta)}$ für alle $\sigma \in \mathcal{G}$. Dies zeigt, daß alle Spezies von $A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)$ in der selben Zusammenhangsklasse liegen. Also ist $\mathrm{Spec}(A_{\mathcal{O}_L}(kP_1))$ zusammenhängend (siehe Seite 23). $\square$

Ausgehend von den Primidealen von $A_{\mathcal{O}_L}(kP_{d-1})$ werden die Primideale von $A_{\mathcal{O}_L}(kP_d)$ bestimmt. Da $a(kP) \cong a(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} a(kP_1)$ ist (Satz 3.26), gilt

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{O}_L}(kP) &= \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} a(kP) \cong \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} (a(kP_{d-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} a(kP_1)) \\ &= (\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} a(kP_{d-1})) \otimes_{\mathcal{O}_L} (\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} a(kP_1)) \\ &= A_{\mathcal{O}_L}(kP_{d-1}) \otimes_{\mathcal{O}_L} A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)\,. \end{aligned}$$

Der Ring $A_{\mathcal{O}_L}(kP)$ wird nun mit $A_{\mathcal{O}_L}(kP_{d-1}) \otimes_{\mathcal{O}_L} A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)$ gleichgesetzt. Die Spezies von $A_{\mathcal{O}_L}(kP)$ sind

$$s_{t,\gamma} : A_{\mathcal{O}_L}(kP) \longrightarrow \mathcal{O}_L\,, \quad x \otimes 1 \longmapsto t(x)\,, \quad 1 \otimes T_2 \longmapsto s_\gamma(T_2)$$

mit $t \in \mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kP_{d-1}))$ und $s_\gamma \in \mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_L}(kP_1))$ (siehe Lemma 3.28).

Satz 4.6. *(i) Die Primideale von $A_{\mathcal{O}_L}(kP)$ sind*

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s_{t,\gamma}) = s_{t,\gamma}^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathcal{P}(\mathfrak{p}, t) \otimes_{\mathcal{O}_L} A_{\mathcal{O}_L}(kP_1) + A_{\mathcal{O}_L}(kP_{d-1}) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{P}(\mathfrak{p}, s_\gamma)$$

mit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L)$, $t \in \mathrm{Sp}(A(kP_{d-1}))$ und $s_\gamma \in \mathrm{Sp}(A(kP_1))$.

(ii) Es gilt $\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s_{t,\gamma}) = \mathcal{P}(\mathfrak{p}, s_{t',\gamma'})$ genau dann, wenn $t \equiv t'$ und $s_\gamma \equiv s_{\gamma'} \pmod{\mathfrak{p}}$ gilt.

(iii) Das Spektrum von $A_{\mathcal{O}_L}(kP)$ ist zusammenhängend.

Beweis. Es sei $s = s_{t,\gamma}$, $I = s^{-1}(\mathfrak{p})$, $I_1 = \mathcal{P}(\mathfrak{p}, t)$, $I_2 = \mathcal{P}(\mathfrak{p}, s_\gamma)$, $A_1 = A_{\mathcal{O}_L}(kP_{d-1})$ und $A_2 = A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)$. Für (i) ist zu zeigen, daß $I = I_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} A_2 + A_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} I_2$ ist. Da $s(I_i) = \mathfrak{p}$, $s(A_i) = \mathcal{O}_L$ und $s(I_i \otimes_{\mathcal{O}_L} A_i) = s(I_i) \cdot s(A_i) = \mathfrak{p}$ für $i = 1, 2$ ist, ist $I_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} A_1 + I_2 \otimes_{\mathcal{O}_L} A_2 \subset I$. Es sei w wie in der Gleichung (3.7) definiert. Um die Notation zu vereinfachen, wird A_2 mit $\mathcal{O}_L[w]$ identifiziert. Dann ist $\{T_i\, w^j\}$ mit $1 \leq i \leq p^{d-1}$ und $0 \leq j \leq p-1$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $A(kP)$. Nach Lemma 4.1 ist

$$I = \mathfrak{p}\, T_1 + \sum_{i=1}^{p^{d-1}} \sum_{j=0}^{p-1} \mathcal{O}_L(T_i\, w^j - s(T_i)\, s(w^j)\, T_1)\,.$$

Es ist $\mathfrak{p}\, T_1 \in I_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} A_2$. Außerdem ist $T_i - s(T_i) = T_i - t(T_i) \in \ker t \subset I_1$ und $w^j - s(w^j) \in I_2$. So ist

$$T_i\, w^j - s(T_i)\, s(w^j) = (T_i - s(T_i))\, s(w^j) + T_i(w^j - s(w^j)) \in I_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} A_2 + A_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} I_2$$

für alle $1 \leq i \leq p^{d-1}$ und $0 \leq j \leq p-1$. Also gilt auch $I \subset I_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} A_1 + I_2 \otimes_{\mathcal{O}_L} A_2$.

Es sei $s' = s_{t',\gamma'}$. Nach Bemerkung 1.26 ist $\mathcal{P}(\mathfrak{p}, s_{t,\gamma}) = \mathcal{P}(\mathfrak{p}, s_{t',\gamma'})$ genau dann, wenn $s \equiv s' \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Genau dann ist $s(x) \equiv s'(x)$ für alle $x \in A_{\mathcal{O}_L}(kP_{d-1})$ und $s(w) \equiv s(w') \pmod{\mathfrak{p}}$. Genau dann ist $t \equiv t'$ und $s_\gamma \equiv s_{\gamma'} \pmod{\mathfrak{p}}$.

Nach Korollar 4.5 ist $A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)$ zusammenhängend. Es wird angenommen, daß auch $A_{\mathcal{O}_L}(kP_{d-1})$ zusammenhängend ist. Dann sind 0 und 1 die einzigen Idempotente von $A_{\mathcal{O}_L}(kP_{d-1})$ und $A_{\mathcal{O}_L}(kP_1)$. Deshalb ist $1 \otimes 1$ das einzige Idempotent von $A_{\mathcal{O}_L}(kP)$ außer 0. Also ist $A_{\mathcal{O}_L}(kP)$ zusammenhängend. Siehe dazu Bemerkung 1.28. $\square$

Korollar 4.7. *Der Ring $a(kP)$ enthält keine Idempotente außer* 0 *und* 1.

Beweis. Nach Satz 4.6 enthält $A_{\mathcal{O}_L}(kP)$ keine Idempotente außer 0 und 1. Da die Idempotente von $a(kP)$ auch Idempotente von $A_{\mathcal{O}_L}(kP)$ sind, sind dies alle Idempotente von $a(kP)$. $\square$

Die Operation der Galoisgruppe $\mathcal{G}$ auf den Spezies $s = s_{t_1,t_2} \in \mathrm{Sp}(A(kP))$ mit $t_1 \in \mathrm{Sp}(A(kP_{d-1}))$ und $t_2 \in \mathrm{Sp}(A(kP_1))$ überträgt sich auf die Parameter t_1, t_2. Für $\sigma \in \mathcal{G}$ ist ${}^\sigma s_{t_1,t_2} = s_{{}^\sigma t_1, {}^\sigma t_2}$. Aus Bemerkung 1.26 und Lemma 4.1 folgt

Satz 4.8. *Die Primideale von $a(kP)$ sind*

$$\mathcal{I}(\mathfrak{p}, s) = \mathcal{P}(\mathfrak{p}, s) \cap a(kP), \quad \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L), \quad s \in \mathrm{Sp}(A(kP)).$$

Es gilt $\mathcal{I}(\mathfrak{p}, s) = \mathcal{I}(\mathfrak{q}, t)$ genau dann, wenn $\mathcal{P}(\mathfrak{q}, t) = \mathcal{P}(\sigma(\mathfrak{p}), {}^\sigma s)$ für ein $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$ ist.

4.2 Das Primspektrum von $a(kG)$

Die Spezieswerte der kG-Moduln mit trivialer Quelle liegen im $|G|_{p'}$-ten Kreisteilungskörper. Der Wertebereich der Funktion β aus Kapitel 3.4 ist der $(2e)$-te Kreisteilungskörper. Es sei ξ eine $(2\,|G|_{p'})$-te primitive Einheitswurzel und

$$F := L(\xi) = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}, \xi).$$

Da e ein Teiler von $|G|_{p'}$ ist, ist $s(M) \in \mathcal{O}_F$ für alle Spezies s von $A(kG)$ und alle unzerlegbare kG-Moduln M (Satz 3.31 und Satz 3.35).

Der erste Satz dieses Unterkapitels hat die Primideale von $A_{\mathcal{O}_F}(kG, \mathrm{Triv})$ zum Inhalt. Um ihn zu beweisen, werden weitere Kenntnisse über projektive Moduln gebraucht. Es sei $\mathrm{IBr}(G) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, wobei φ_1 der triviale Charakter ist, und

$\mathrm{IPr}(G) = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ wie in Bemerkung 1.8. Die Matrix $C = (c_{ij})_{i,j} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, deren Koeffizienten durch die Gleichungen

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,\varphi_j\,, \quad 1 \le i \le n$$

gegeben sind, heißt *Cartanmatrix*. Ihre Determinante ist eine p-Potenz (siehe [CR], Thrm 18.25). Ist $q \neq p$ eine Primzahl und $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_F$ mit $q \in \mathfrak{q}$, so gibt es zu jedem $c \in G_{p'}$ ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so daß $\eta_i(c) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ gilt. Denn es ist $\varphi_1(c) = 1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ und $\det C \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$. Also gilt

Bemerkung 4.9. *Es sei $q \neq p$ eine Primzahl, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ mit $q \in \mathfrak{q}$ und es sei $c \in G_{p'}$. Dann ist $\varphi_V(c) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ für einen projektiven kG-Modul V.*

Die folgende Bemerkung gibt die bestmögliche untere Schranke für die $\mathfrak{p}$-Exponenten der Brauercharakterwerte der projektiven kG-Moduln an (siehe [CR62], 84.14).

Bemerkung 4.10. *Es sei $c \in G_{p'}$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_L$ mit $p \in \mathfrak{p}$.*

(i) Für jeden unzerlegbaren projektiven kG–Modul M ist $v_{\mathfrak{p}}(\varphi_M(c)) \ge v_{\mathfrak{p}}(|C_G(c)|)$.

(ii) Es existiert ein unzerlegbarer projektiver kG–Modul M mit $v_{\mathfrak{p}}(\varphi_M(c)) = v_{\mathfrak{p}}(|C_G(c)|)$.

M. Deiml untersuchte Brauerspezies des Greenrings einer beliebigen endlichen Gruppe. In der nächsten Bemerkung wird [Dei], Lemma 4.3 zitiert.

Bemerkung 4.11. *Es sei q eine Primzahl, $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_F$ mit $q \in \mathfrak{q}$ und $c, d \in G_{p'}$. Außerdem seien s_c, $s_d \in \mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_F}(kG))$ die Brauerspezies mit $s_c(M) = \varphi_M(c)$ und $s_d(M) = \varphi_M(d)$ für alle unzerlegbaren kG-Moduln M. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(1) Es gilt $s_c(x) \equiv s_d(x) \pmod{\mathfrak{q}}$ für alle $x \in A_{\mathcal{O}_F}(kG)$.

(2) Es ist $c_{q'} =_G d_{q'}$.

Die letzten drei Bemerkungen gelten für beliebige endliche Gruppen G. Zum Beweis des Satzes über die Primideale des Trivial-Source-Rings werden noch einige Lemmata benötigt.

Lemma 4.12. *Es seien $D \le P$ und $Q \le G$ zwei p-Gruppen mit $D \le Q$. Ferner sei $c \in C_G(D)_{p'}$ und $\overline{N} = N_G(D)/D$. Es gilt $Q/D \le C_{\overline{N}}(cD)$ genau dann, wenn $Q \le C_G(c)$ ist. Insbesondere ist D genau dann eine p-Sylowgruppe von $C_G(c)$, wenn $C_{\overline{N}}(cD)$ eine p'-Gruppe ist.*

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $D = 1$. Deshalb sei $D > 1$. Da $D \leq Q$ ist, ist $Q \leq N_G(Q) \leq N_G(D)$. Also ist $Q/D \leq N_G(D)/D = \overline{N}$. Es sei $Q/D \leq C_{\overline{N}}(cD)$. Dann ist $cD \in C_{\overline{N}}(Q/D)$. Somit ist $c \in N_G(Q)$. Da $C_G(Q) = N_G(Q) \cap C_G(D)$ gilt (Lemma 2.17), ist $c \in C_G(Q)$. Deshalb ist $Q \leq C_G(c)$. Ist umgekehrt $Q \leq C_G(c)$, dann ist $Q \leq C_{N_G(D)}(c)$. Folglich ist $Q/D \leq C_{\overline{N}}(cD)$. □

Lemma 4.13. *Es seien (D, c), $(D, c') \in Y$ und q eine Primzahl sowie $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_F)$ mit $q \in \mathfrak{q}$. Außerdem sei $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D,c'} \pmod{\mathfrak{q}}$ und $\tilde{s}_{D,c}(M) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ für einen kG-Modul M mit Vertex D und trivialer Quelle. Dann ist $c_{q'} =_{N_G(D)} c'_{q'}$.*

Beweis. Es sei $N = N_G(D)$ und $\overline{N} = N/D$. Es sei V ein unzerlegbarer projektiver $k\overline{N}$-Modul. Dann ist $\operatorname{inf}_{\overline{N}}^{N} V$ ein unzerlegbarer kN-Modul mit Vertex D und trivialer Quelle (Bem. 1.12). Für den Greenkorrespondenten M von $\operatorname{inf}_{\overline{N}}^{N} V$ gilt

$$\tilde{s}_{D,c}(M) = s_{D,c}(\operatorname{inf}_{\overline{N}}^{N} V) = \varphi_V(cD). \tag{4.1}$$

Da $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D,c'} \pmod{\mathfrak{q}}$ vorausgesetzt wird, gilt $\varphi_V(cD) \equiv \varphi_V(c'D) \pmod{\mathfrak{q}}$ für alle projektiven $k\overline{N}$-Moduln V. Außerdem ist $\varphi_W(cD) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ für einen projektiven $k\overline{N}$-Modul W.

Für die Brauerspezies s_{cD} und $s_{c'D}$ von $A_{\mathcal{O}_F}(k\overline{N})$ gilt also $s_{cD}(x) \equiv s_{c'D}(x) \pmod{\mathfrak{q}}$ für alle $x \in A_{\mathcal{O}_F}(k\overline{N}, 1)$ und $s_{cD}(y) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ für ein $y \in A_{\mathcal{O}_F}(k\overline{N}, 1)$. Es sei $z \in A_{\mathcal{O}_F}(k\overline{N})$. Da $A_{\mathcal{O}_F}(k\overline{N}, 1)$ ein Ideal von $A_{\mathcal{O}_F}(k\overline{N})$ ist, ist $zy \in A_{\mathcal{O}_F}(k\overline{N}, 1)$. Also ist $s_{cD}(z) = s_{cD}(zy)\, s_{cD}(y)^{-1} \equiv s_{c'D}(zy)\, s_{c'D}(y)^{-1} = s_{c'D}(z) \pmod{\mathfrak{q}}$. Nach Bemerkung 4.11 ist dann $cD_{q'} =_{\overline{N}} c'D_{q'}$, woraus $c_{q'} =_{N_G(D)} c'_{q'}$ folgt. □

Der in (4.1) formulierte Zusammenhang zwischen den unzerlegbaren Moduln mit Vertex D aus $A(kG, \mathrm{Triv})$ bzw. $A(kN_G(D), \mathrm{Triv})$ und den unzerlegbaren projektiven Moduln aus $A(k(N_G(D)/D), \mathrm{Triv})$ wird in den Beweisen von Satz 4.15 und Satz 4.19 einige Male verwendet.

Lemma 4.14. *Es sei $D \leq P$, $(Q, c, t) \in X$ mit $Q \leq D$ und $c \in C_G(D)$ und es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_F$ mit $p \in \mathfrak{p}$. Ferner seien V ein $kN_G(D)$-Modul und Z ein $k\langle D, c\rangle$-Modul, deren Vertizes echte Untergruppen von D sind. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \big(u_{Q,c,t} \circ \operatorname{res}^{N_G(D)}_{\langle Q,c\rangle}\big)(V) &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \\ \big(u_{Q,c,t} \circ \operatorname{res}^{\langle D,c\rangle}_{\langle Q,c\rangle}\big)(Z) &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\big(t \circ \operatorname{res}^D_Q\big)(T) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle kD-Moduln T, deren Vertizes echte Untergruppen von D sind.

Beweis. Es sei $V = V_{\chi,j}$ mit $\chi \in \operatorname{IBr}(N_G(D)/D)$ und $j \in \{1, \ldots, |D|\}$. Dann ist $j = (D : Q)m + r$ mit $0 \leq m \leq |Q|$ und $0 \leq r < (D : Q)$. Da der Vertex von

V eine echte Untergruppe von D ist, ist $j \equiv 0 \pmod p$ und somit $r \equiv 0 \pmod p$. Ist $Q = D$, dann ist $t(T_j) = 0$, da t Vertex D hat. Ist $Q < D$, dann gilt wegen Lemma 2.4 die Gleichung $\operatorname{res}^D_Q T_j = ((D:Q) - r)\, T_{m+1} + r\, T_m \equiv 0 \pmod p$. Also ist $\big(t \circ \operatorname{res}^D_Q\big)(T_j) \equiv 0$. Aus Korollar 3.33 folgt die Behauptung. □

Satz 4.15. *Es seien $(D,c), (D',c') \in Y$ mit $D \leq D'$. Ferner sei q eine Primzahl und $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_F$ mit $q \in \mathfrak{q}$. Es gilt $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c'} \pmod{\mathfrak{q}}$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

(1) $D = D'$ und $c_{q'} =_{N_G(D)} {c'}_{q'}$.

(2) $D < D'$, $q = p$, $\{c, c'\} \subset C_G(D')$ und $c =_{N_G(D')} c'$.

Beweis. Es gelte (1). Es sei M ein kG-Modul mit trivialer Quelle und einem Vertex größer gleich D und es sei $\operatorname{res}^G_{\langle D,c\rangle} M = M_1 + M_2$, wobei die direkten Summanden von M_1 Vertex D und die von M_2 Vertex kleiner D haben. Nach Bemerkung 4.11 ist dann

$$\tilde{s}_{D,c}(M) = \varphi_{M_1}(c) \equiv \varphi_{M_1}(c_{q'}) = \tilde{s}_{D,c_{q'}}(M) \pmod{\mathfrak{q}}.$$

Analog gilt $\tilde{s}_{D',c'}(M) \equiv \tilde{s}_{D',{c'}_{q'}}(M) \pmod{\mathfrak{q}}$. Also ist $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D,c_{q'}} = \tilde{s}_{D',{c'}_{q'}} \equiv \tilde{s}_{D',c'}$ $\pmod{\mathfrak{q}}$.

Es gelte (2) und außerdem $c = c'$. Es sei M ein kG-Modul mit trivialer Quelle und $W := \operatorname{res}^G_{\langle D',c\rangle} M$. So existiert eine Zerlegung $W = W_1 + W_2$, wobei die unzerlegbaren Summanden von W_1 Vertex D' haben und die von W_2 Vertex kleiner D' haben. Nach Korollar 3.33 ist $\big(u_{D,c} \circ \operatorname{res}^{\langle D',c\rangle}_{\langle D,c\rangle}\big)(W_1) = \varphi_{W_1}(c)$. Wegen Lemma 4.14 ist $\big(u_{D,c} \circ \operatorname{res}^{\langle D',c\rangle}_{\langle D,c\rangle}\big)(W_2) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$. Dann ist

$$\tilde{s}_{D',c}(M) = u_{D',c}(W_1) = \varphi_{W_1}(c) \equiv \big(u_{D,c} \circ \operatorname{res}^{\langle D',c\rangle}_{\langle D,c\rangle}\big)(W_1 + W_2) = \tilde{s}_{D,c}(M).$$

Es gelte nun (2) ohne weitere Einschränkung. Nach dem eben gezeigten ist $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c} \pmod{\mathfrak{q}}$. Da $c =_{N_G(D')} c'$ ist, ist $\tilde{s}_{D',c} = \tilde{s}_{D',c'}$. Also gilt $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c'} \pmod{\mathfrak{q}}$.

Nun wird $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c'} \pmod{\mathfrak{q}}$ und $D = D'$ vorausgesetzt. Ist $q \neq p$, so gibt es einen projektiven $k(N_G(D)/D)$-Modul V mit $\varphi_V(c) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ (Bemerkung 4.9). Für den Greenkorrespondenten M von $\operatorname{inf}^{N_G(D)}_{N_G(D)/D} V$ gilt dann $\tilde{s}_{D,c}(M) = s_{D,c}(\operatorname{inf}^{N_G(D)}_{N_G(D)/D} V) = \varphi_V(c) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$. Nach Lemma 4.13 ist dann $c_{q'} =_{N_G(D)} {c'}_{q'}$. Es sei $q = p$ und $c \notin C_G(D)$. Dann ist $D \neq 1$ und wegen Korollar 3.10 ist $\tilde{s}_{D,c}(M_{D,1,1}) = s_{D,c}(V_{1,1}) = 1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$. Wiederum nach Lemma 4.13 ist $c =_{N_G(D)} c'$.

Es sei nun $q = p$ und $c \in C_G(D)$. Dann ist auch $c' \in C_G(D)$, da sonst $D > 1$ und $s_{D,c}(V_{1,1}) = 1$ und $s_{D,c'}(V_{1,1}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ wäre. Es seien Q, Q' zwei p-Sylowgruppen von $C_G(c)$ bzw. $C_G(c')$ mit $D \leq Q$ und $D \leq Q'$. Wegen (2) ist $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{Q,c} \pmod{\mathfrak{q}}$ und $\tilde{s}_{D,c'} \equiv \tilde{s}_{Q',c'} \pmod{\mathfrak{q}}$. Nach Lemma 4.12 ist $C_{N_G(Q)/Q}(cQ)$ eine p'-Gruppe. Also existiert ein projektiver $k(N_G(Q)/Q)$-Modul V mit $\varphi_V(c) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ (Bem. 4.10). Es sei M der Greenkorrespondent von $\inf_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} V$. So ist $\tilde{s}_{Q',c'}(M) \equiv \tilde{s}_{Q,c}(M) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$. Da M Vertex Q hat, ist $Q' \leq_G Q$. Analog zeigt man, daß $Q' \geq_G Q$ ist. Somit ist $Q' =_G Q$. Da Q und Q' zwei gleichmächtige p-Untergruppen von $N_G(D)$ sind, ist $Q' =_{N_G(D)} Q$. Also ist $Q' = {}^gQ$ für ein $g \in N_G(D)_{p'}$. Deswegen gilt $\tilde{s}_{Q,c} \equiv \tilde{s}_{Q',c'} = \tilde{s}_{{}^gQ,c'} = \tilde{s}_{Q,{}^{g^{-1}}c'} \pmod{\mathfrak{q}}$. Nach Lemma 4.13 ist dann $c =_{N_G(Q)} {}^{g^{-1}}c'$, also $c =_{N_G(D)} c'$.

Jetzt sei $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c'} \pmod{\mathfrak{q}}$ und $D < D'$ sowie $q \neq p$. Es sei W ein projektiver $k(N_G(D)/D)$-Modul mit $\varphi_W(c) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ (siehe Bem. 4.9), $V = \inf_{N_G(D)/D}^{N_G(D)} W$ und M der Greenkorrespondent von V. Dann ist $\tilde{s}_{D,c}(M) = s_{D,c}(V) = \varphi_W(c) \not\equiv 0$, also $\tilde{s}_{D',c'}(M) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$. Da M Vertex D und $\tilde{s}_{D',c'}$ Vertex $D' > D$ hat, gilt $\tilde{s}_{D',c'}(M) = 0$. Also kann dieser Fall nicht auftreten.

Schließlich sei $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c'} \pmod{\mathfrak{q}}$, $D < D'$ und $q = p$. Da $\tilde{s}_{D,c}(M) \equiv \tilde{s}_{D',c'}(M) = 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ für alle unzerlegbaren kG-Moduln M mit Vertex D ist, gilt $\varphi_V(c) = s_{D,c}(\inf_{N_G(D)/D}^{N_G(D)} V) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ für alle projektiven $k(N_G(D)/D)$-Moduln V und aus Korollar 3.10 folgt $c \in C_G(D)$. Nach Bemerkung 4.10 ist dann p ein Teiler von $C_{\overline{N}}(cD)$, wobei $\overline{N} = N_G(D)$ ist. Es sei $Q_1 \leq D'$ mit $(Q_1 : D) = p$. Dann ist ${}^{g^{-1}}Q_1/D \leq C_{\overline{N}}(cD)$ für ein $g \in \overline{N}$. Nach Lemma 4.12 ist ${}^{g^{-1}}Q_1 \leq C_G(c)$, also ${}^gc \in C_G(Q_1)$. Da $N_G(D) = N_G(P)C_G(D)$ ist (Lemma 2.17) und $c \in C_G(D)$ ist, kann $g \in N_G(P) \leq N_G(Q_1)$ angenommen werden. Also ist $c \in C_G(Q_1)$. Nach (2) ist $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{Q_1,c} \pmod{\mathfrak{q}}$. Im nächsten Schritt wählt man $Q_2 \leq D'$ mit $(Q_2 : Q_1) = p$ und zeigt, daß $c \in C_G(Q_2)$ und $\tilde{s}_{Q_1,c} \equiv \tilde{s}_{Q_2,c} \pmod{\mathfrak{q}}$ ist. Man fährt auf diese Weise fort und erhält $c \in C_G(D')$ und $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c} \pmod{\mathfrak{q}}$. Dann ist $\tilde{s}_{D',c} \equiv \tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c'} \pmod{\mathfrak{q}}$. Nach dem oben gezeigten ist $c =_{N_G(D')} c'$ und somit auch $c' \in C_G(D')$. Also gilt (2). □

Satz 4.15 entsprechende Sätze gelten auch für beliebige endliche Gruppen ([Dei], Satz 5.7 und Satz 5.11). Der Beweis des nächsten Korollars ist [Dei], Satz 5.14 entnommen.

Korollar 4.16. *Das Spektrum von* $A_{\mathcal{O}_F}(G, \mathrm{Triv})$ *ist zusammenhängend.*

Beweis. Das Spektrum von $A_{\mathcal{O}_F}(G, \mathrm{Triv})$ ist zusammenhängend, falls die Menge $\mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_F}(kG, \mathrm{Triv}))$ nur aus einer Zusammenhangsklasse besteht. Es sei $D \leq P$ und $c \in N_G(D)_{p'}$. Es wird gezeigt, daß $\tilde{s}_{D,c}$ und $\tilde{s}_{1,1}$ zusammenhängend sind. Dazu seien $\{p_1, \ldots, p_n\}$ die von p verschiedenen Primteiler von $|G|$ und $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ Primideale von $\mathcal{O}_F$ mit $p_i \in \mathfrak{p}_i$ für $1 \leq i \leq n$. Ferner sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $p \in \mathfrak{p}$ und es sei $g_i := \prod_{j=1}^{i} c_{p_j}$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $(g_1)_{p_1'} = 1$, $(g_i)_{p_i'} = g_{i-1}$ für $2 \leq i \leq n$ und es ist $g_n = c$. Nach Satz 4.15 ist

$$\tilde{s}_{1,1} \equiv \tilde{s}_{D,1} \pmod{\mathfrak{p}}, \quad \tilde{s}_{D,1} \equiv \tilde{s}_{D,g_1} \pmod{\mathfrak{p}_1}, \quad \tilde{s}_{D,g_{i-1}} \equiv \tilde{s}_{D,g_i} \pmod{\mathfrak{p}_i}$$

mit $2 \leq i \leq n$. Wegen Bemerkung 1.27 sind dann $\mathcal{P}(\mathfrak{p}, \tilde{s}_{1,1})$ und $\mathcal{P}(\mathfrak{p}, \tilde{s}_{D,c})$ in der selben Zusammenhangskomponente. Also sind die Spezies $\tilde{s}_{1,1}$ und $\tilde{s}_{D,c}$ zusammenhängend. Da die Wahl von D, c beliebig war, sind je zwei Spezies von $A_{\mathcal{O}_F}(kG, \mathrm{Triv})$ zusammenhängend. $\square$

Beispiel 4.17. Es sei $G = D_{2p}$ mit $p \neq 2$. Im Beispiel 3.8 wurde die Speziestafel von $A(kG, \mathrm{Triv})$ angegeben. Die Speziestafeln modulo $q = 2$ bzw. modulo $q = p$ sind

mod 2	F_1	F_α	U_1	U_α
$s_{1,1}$	1	1	1	1
$s_{1,\tau}$	1	1	1	1
$s_{P,1}$	1	1	0	0
$s_{P,\tau}$	1	1	0	0

mod p	F_1	F_α	U_1	U_α
$s_{1,1}$	1	1	0	0
$s_{1,\tau}$	1	-1	1	-1
$s_{P,1}$	1	1	0	0
$s_{P,\tau}$	1	-1	0	0

Lemma 4.18. *Es sei $D \leq Q \leq P$ und $t, t' \in \mathrm{Sp}(A_{\mathcal{O}_F}(kD))$. Außerdem sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_F$. Es gilt $t \equiv t' \pmod{\mathfrak{p}}$ genau dann, wenn $t \circ \mathrm{res}_D^Q \equiv t' \circ \mathrm{res}_D^Q \pmod{\mathfrak{p}}$ gilt.*

Beweis. Es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $|D| = p^{m+1}$. Ohne Einschränkung sei $(Q : D) = p$. Nach Lemma 3.24 ist

$$a(kQ) = \mathbb{Z}[w_0, w_1, \ldots, w_m], \quad a(kD) = \mathbb{Z}[w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}],$$

wobei die w_i wie in jenem Lemma definiert sind. Es ist $\mathrm{res}_D^Q w_{i+1} = w_i$ für $0 \leq i \leq m-1$ und $\mathrm{res}_D^Q w_0 = 2\,T_1$.

Es sei $\big(t \circ \mathrm{res}_D^Q\big)(x) \equiv \big(t' \circ \mathrm{res}_D^Q\big)(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $x \in A_{\mathcal{O}_F}(kQ)$. Dann ist

$$t(w_i) = \big(t \circ \mathrm{res}_D^Q\big)(w_{i+1}) \equiv \big(t' \circ \mathrm{res}_D^Q\big)(w_{i+1}) = t'(w_i) \pmod{\mathfrak{p}}$$

für $0 \leq i \leq m-1$. Also ist $t(x) \equiv t'(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $x \in A_{\mathcal{O}_F}(kD)$. Die andere Richtung ist offensichtlich. $\square$

Satz 4.19. *Es seien $(D, c, t), (D', c', t') \in X$ mit $D \leq D'$ und $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_F$. Es gilt $\tilde{s}_{D,c,t} \equiv \tilde{s}_{D',c',t'} \pmod{\mathfrak{q}}$ genau dann, wenn $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c'} \pmod{\mathfrak{q}}$ und $t \circ \mathrm{res}_D^{D'} \equiv t' \pmod{\mathfrak{q}}$ gilt.*

Beweis. Der Satz ist richtig, falls $\mathfrak{q} = 0$ oder $D' = 1$ ist. Deshalb sei $\mathfrak{q} \neq 0$ und $D' > 1$. Außerdem sei q die Primzahl mit $q \in \mathfrak{q}$.

Es sei $\tilde{s}_{D,c,t} \equiv \tilde{s}_{D',c',t'} \pmod{\mathfrak{q}}$. Da $A(kG, \mathrm{Triv})$ ein Teilring von $A(kG)$ ist, gilt dann $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c'} \pmod{\mathfrak{q}}$. Es werden die Fälle $q = p$ und $q \neq p$ unterschieden. Zuerst sei $q \neq p$. Dann ist $D = D'$ und $c_{q'} =_{N_G(D)} c'_{q'}$ (Satz 4.15). Da $s_{D,c}(V_{1,1}) \in \{1, (P : D)\}$ ist (Korollar 3.10), ist $s_{D,c}(V_{1,1}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$. Wegen $c_{q'} =_{N_G(D)} c'_{q'}$ ist

$\alpha(c) \equiv \alpha(c')$ (mod $\mathfrak{q}$) (Bemerkung 4.11). Also ist $\beta(c) \equiv \beta(c')$ oder $\beta(c) \equiv -\beta(c')$ (mod $\mathfrak{q}$). Dann ist

$$\begin{aligned} t(T_j) &= \beta(c)^{1-j} \cdot s_{D,c}(V_{1,1})^{-1} \cdot \tilde{s}_{D,c,t}(M_{D,1,j}) \\ &\equiv \pm\beta(c')^{1-j} \cdot s_{D,c'}(V_{1,1})^{-1} \cdot \tilde{s}_{D,c',t'}(M_{D,1,j}) \equiv \pm t'(T_j) \pmod{\mathfrak{q}} \end{aligned}$$

für alle $j \in \{1,\dots,|D|\}$ mit $p \nmid j$ (siehe Korollar 3.32). Nach Satz 4.4 bzw. Satz 4.6 ist dann $p = 2$. Also gilt $t \equiv t'$ (mod $\mathfrak{q}$).

Nun sei $\tilde{s}_{D,c,t} \equiv \tilde{s}_{D',c',t'}$ (mod $\mathfrak{q}$) und $q = p$. Ist $c \notin C_G(D)$, so ist $D = D'$ und $c =_{N_G(D)} c'$ nach Satz 4.15. Dann ist $\tilde{s}_{D',c',t'} = \tilde{s}_{D,c',t'} = \tilde{s}_{D,c,t'}$. Außerdem ist $s_{D,c}(V_{1,1}) = 1$. Wie oben zeigt man, daß $t \equiv t'$ (mod $\mathfrak{q}$) ist. Es sei $c \in C_G(D)$. Nach Satz 4.15 ist dann $\{c,c'\} \subset C_G(D')$ und $c =_{N_G(D')} c'$. Es sei Q eine p-Sylowgruppe von $C_G(c)$ mit $D' \leq Q$. Ferner sei $\overline{G} = N_G(Q)/Q$. Nach Lemma 4.12 ist $C_{\overline{G}}(cQ)$ eine p'-Gruppe. Wegen Bemerkung 4.10 existiert ein projektiver $k\overline{G}$-Modul V mit $\varphi_V(cQ) \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{q}$). Es sei $\varphi \in \mathrm{IBr}(\overline{G})$ mit $V_{\varphi,1} = \mathrm{inf}_{\overline{G}}^{N_G(Q)} V$. Ferner sei $j \in \{1,\dots,|Q|\}$ mit $p \nmid j$, $M := M_{Q,\varphi,j}$ der Greenkorrespondent von $V_{\varphi,j}$ und M' der $N_G(Q)$-Modul mit $\mathrm{res}^G_{N_G(Q)} M = V_{\varphi,j} + M'$. Wegen Korollar 3.33 ist $\big(u_{D,c,t} \circ \mathrm{res}^{N_G(Q)}_{\langle D,c\rangle}\big)(V_{\varphi,j}) = s_{Q,c}(V_{\varphi,1}) \cdot (t \circ \mathrm{res}^Q_D)(T_j)$. Nach Lemma 4.14 gilt $\big(u_{D,c,t} \circ \mathrm{res}^{N_G(Q)}_{\langle D,c\rangle}\big)(M') \equiv 0$ (mod $\mathfrak{q}$). Also ist

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{D,c,t}(M) &= \big(u_{D,c,t} \circ \mathrm{res}^{N_G(Q)}_{\langle D,c\rangle} \circ \mathrm{res}^G_{N_G(Q)}\big)(M) = \big(u_{D,c,t} \circ \mathrm{res}^{N_G(Q)}_{\langle D,c\rangle}\big)(V_{\varphi,j} + M') \\ &\equiv s_{Q,c}(V_{\varphi,1}) \cdot \big(t \circ \mathrm{res}^Q_D\big)(T_j) \pmod{\mathfrak{q}}. \end{aligned}$$

Da $c =_{N_G(D')} c'$ ist, ist $\tilde{s}_{D',c',t'} = \tilde{s}_{D',c,t'}$. Wie eben bekommt man

$$\tilde{s}_{D',c,t'}(M) \equiv s_{Q,c}(V_{\varphi,1}) \cdot \big(t' \circ \mathrm{res}^Q_{D'}\big)(T_j) \pmod{\mathfrak{q}}.$$

Da $s_{Q,c}(V_{\varphi,1}) = \varphi_V(cQ) \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{q}$) ist, ist $(t \circ \mathrm{res}^Q_D)(T_j) \equiv (t' \circ \mathrm{res}^Q_{D'})(T_j)$ (mod $\mathfrak{q}$) für alle $j \in \{1,\dots,|Q|\}$ mit $p \nmid j$. Für $p \mid j$ gilt $(t \circ \mathrm{res}^Q_D)(T_j) \equiv 0 \equiv (t' \circ \mathrm{res}^Q_{D'})(T_j)$ wegen Lemma 4.14. Also ist $\big(t \circ \mathrm{res}^{D'}_D\big) \circ \mathrm{res}^Q_{D'} \equiv t' \circ \mathrm{res}^Q_{D'}$ (mod $\mathfrak{q}$). Nach Lemma 4.18 ist dann $t \circ \mathrm{res}^{D'}_D \equiv t'$ (mod $\mathfrak{q}$). Damit ist eine Richtung der Behauptung des Satzes bewiesen.

Es gelte $\tilde{s}_{D,c} \equiv \tilde{s}_{D',c'}$ und $t \circ \mathrm{res}^{D'}_D \equiv t'$ (mod $\mathfrak{q}$). Nach Satz 4.6 ist dann $q = 2$ oder $q = p$. Zuerst wird der Fall $D = D'$ behandelt. Dann ist $t \equiv t'$ (mod $\mathfrak{q}$). Ist $q = p$, so ist $c =_{N_G(D)} c'$. Daher ist $\tilde{s}_{D,c,t} = \tilde{s}_{D,c',t}$. Wegen $u_{D,c',t} \equiv u_{D,c',t'}$ (mod $\mathfrak{q}$) ist $\tilde{s}_{D,c',t} \equiv \tilde{s}_{D,c',t'}$ (mod $\mathfrak{q}$). Somit gilt $\tilde{s}_{D,c,t} \equiv \tilde{s}_{D,c',t'} = \tilde{s}_{D',c',t'}$ (mod $\mathfrak{q}$). Es sei $q = 2$ und es wird angenommen, daß $\tilde{s}_{D,c,t}(M) \not\equiv \tilde{s}_{D,c',t'}(M)$ (mod $\mathfrak{q}$) für einen kG-Modul M gilt. Dann ist $s_{D,c,t}(W) \not\equiv s_{D,c',t'}(W)$ (mod $\mathfrak{q}$) für $W := \mathrm{res}^G_{N_G(D)} M$. Da $A_{\mathcal{O}_F}(kN_G(D), D)$ ein Ideal von $A_{\mathcal{O}_F}(kN_G(D))$ ist, ist $z := W \cdot V_{1,1} \in A_{\mathcal{O}_F}(kN_G(D), D)$. Da $s_{D,c,t}(V_{1,1}) = s_{D,c}(V_{1,1}) \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{q}$) und

$s_{D,c,t}(V_{1,1}) \equiv s_{D,c',t'}(V_{1,1}) \pmod{\mathfrak{q}}$ ist, ist $s_{D,c,t}(z) \not\equiv s_{D,c',t'}(z) \pmod{\mathfrak{q}}$. Also ist $s_{D,c,t}(V) \not\equiv s_{D,c',t'}(V) \pmod{\mathfrak{q}}$ für einen unzerlegbaren Modul $V \in A(kN_G(D), D)$. Also ist $V = V_{\varphi,j}$ mit $\varphi \in \mathrm{IBr}(N_G(D))$ und $1 \leq j \leq |D|$. Wegen $q = 2$ ist $\beta(c) \equiv \beta(c') \pmod{\mathfrak{q}}$. Nach Korollar 3.32 gilt dann

$$s_{D,c,t}(V) = s_{D,c}(V_{\varphi,1})\, t(T_j)\, \beta(c)^{j-1} \equiv s_{D,c'}(V_{\varphi,1})\, t'(T_j)\, \beta(c')^{j-1} = s_{D,c',t'}(V)\,.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also gilt $\tilde{s}_{D,c,t} \equiv \tilde{s}_{D,c',t'} = \tilde{s}_{D',c',t'} \pmod{\mathfrak{q}}$, falls $D = D'$ ist.

Schließlich sei $D < D'$. Dann ist $q = p$, $c =_{N_G(D')} c'$ und $c, c' \in C_G(D')$ (Satz 4.15). Nach Korollar 3.33 gilt

$$\big(u_{D,c,t} \circ \mathrm{res}^{\langle D',c\rangle}_{\langle D,c\rangle}\big)(Z_{\varphi,j}) = \varphi(c) \cdot \big(t \circ \mathrm{res}^{D'}_{D}\big)(T_j) \equiv \varphi(c) \cdot t'(T_j) = u_{D',c,t'}(Z_{\varphi,j})$$

für alle $1 \leq j \leq |D'|$ und $\varphi \in \mathrm{Irr}(\langle c\rangle)$. Da $\tilde{s}_{D,c,t} = \big(u_{D,c,t} \circ \mathrm{res}^{\langle D',c\rangle}_{\langle D,c\rangle}\big) \circ \mathrm{res}^{G}_{\langle D',c\rangle}$ und $\tilde{s}_{D',c',t} = \tilde{s}_{D',c,t'} = u_{D',c,t'} \circ \mathrm{res}^{G}_{\langle D',c\rangle}$ ist, ist $\tilde{s}_{D,c,t} \equiv \tilde{s}_{D',c',t'} \pmod{\mathfrak{q}}$. □

Beispiel 4.20. Es sei $p = 3$ und $G = S_3$. Das Beispiel 3.34 wird fortgeführt. Es ist $L = \mathbb{Q}$ und $F = \mathbb{Q}(i)$, also $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[i]$. Die Primideale von $\mathcal{O}_F$, welche 2 und 3 enthalten, sind $\mathfrak{q} = (1-i)\mathcal{O}_F$ und $\mathfrak{p} = 3\mathcal{O}_F$. In den Beispielen 4.3 und 4.17 wurde gezeigt, daß für die Spezies von $A_{\mathcal{O}_F}(kP)$ und $A_{\mathcal{O}_F}(kG, \mathrm{Triv})$

$$t_\zeta \equiv t_{-\zeta} \pmod{\mathfrak{q}}, \quad s_{1,1} \equiv s_{1,\tau} \pmod{\mathfrak{q}}, \quad s_{P,1} \equiv s_{P,\tau} \pmod{\mathfrak{q}}$$

und

$$t_1 \equiv t_\zeta \pmod{\mathfrak{p}}, \quad s_{1,1} \equiv s_{P,1} \pmod{\mathfrak{p}}$$

gilt. Nach Satz 4.19 gilt dann für die Spezies von $A_{\mathcal{O}_F}(kG)$

$$\begin{aligned} s_{1,1,\mathrm{id}} &\equiv s_{1,\tau,\mathrm{id}} && \pmod{\mathfrak{q}} \\ s_{P,1,t_\zeta} &\equiv s_{P,1,t_{(-\zeta)}} && \pmod{\mathfrak{q}} \\ s_{P,\tau,t_\zeta} &\equiv s_{P,\tau,t_{(-\zeta)}} && \pmod{\mathfrak{q}} \\ s_{P,1,t_\zeta} &\equiv s_{P,\tau,t_\zeta} && \pmod{\mathfrak{q}} \end{aligned}$$

und

$$s_{1,1,\mathrm{id}} \equiv s_{P,1,t_\zeta} \pmod{\mathfrak{p}}$$

Dies wird durch die Speziestafeln modulo $\mathfrak{q}$ und modulo $\mathfrak{p}$ bestätigt.

mod $\mathfrak{q}$	F_1	F_α	$V_{1,2}$	$V_{\alpha,2}$	U_1	U_α
$s_{1,1,\mathrm{id}}$	1	1	0	0	1	1
$s_{1,\tau,\mathrm{id}}$	1	1	0	0	1	1
$s_{P,1,t_\zeta}$	1	1	1	1	0	0
$s_{P,1,t_{-\zeta}}$	1	1	1	1	0	0
s_{P,τ,t_ζ}	1	1	i	i	0	0
$s_{P,\tau,t_{-\zeta}}$	1	1	i	i	0	0

mod $\mathfrak{p}$	F_1	F_α	$V_{1,2}$	$V_{\alpha,2}$	U_1	U_α
$s_{1,1,\mathrm{id}}$	1	1	2	2	0	0
$s_{1,\tau,\mathrm{id}}$	1	2	0	0	1	2
$s_{P,1,t_\zeta}$	1	1	2	2	0	0
$s_{P,1,t_{-\zeta}}$	1	1	1	1	0	0
s_{P,τ,t_ζ}	1	2	$2i$	i	0	0
$s_{P,\tau,t_{-\zeta}}$	1	2	i	$2i$	0	0

Korollar 4.21. *Das Spektrum von $A_{\mathcal{O}_F}(kG)$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $D \leq P$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_F)$ mit $p \in \mathfrak{p}$ und $t_1 = \mathrm{id} \circ \operatorname{res}^P_{P_0}$ die Brauerspezies von $A_{\mathcal{O}_F}(kD)$. Per Induktion nach $|D|$ soll gezeigt werden, daß es eine Spezies u von $A_{\mathcal{O}_F}(kD)$ mit Vertex D und $u \equiv t_1 \pmod{\mathfrak{p}}$ gibt. Diese Aussage ist richtig für $|D| = 1$ und $|D| = p$ (siehe Satz 4.4). Es sei $Q < D$ mit $(D : Q) = p$ und $t' \in \operatorname{Sp}\big(A_{\mathcal{O}_F}(kQ), Q\big)$ mit $t'(x) \equiv t_1(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $x \in A_{\mathcal{O}_F}(kQ)$. Nach Lemma 3.28 ist $u := u_{t',1}$ eine Spezies von $A(kD)$ mit Vertex D. Außerdem ist $u(x) \equiv t_1(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $x \in A_{\mathcal{O}_F}(kD)$.

Es sei $c \in N_G(D)_{p'}$ und $t \in \operatorname{Sp}(A_{\mathcal{O}_F}(kD), D)$. Es wird gezeigt, daß $\tilde{s}_{D,c,t}$ und $\tilde{s}_{1,1,\mathrm{id}}$ in der selben Zusammenhangsklasse von $\operatorname{Sp}(A_{\mathcal{O}_F}(kG))$ liegen. Da die Spektren von $A_{\mathcal{O}_F}(kG, \mathrm{Triv})$ und $A_{\mathcal{O}_F}(kP)$ zusammenhängend sind (Korollar 4.5 und 4.16), gilt $\tilde{s}_{D,c} \sim \tilde{s}_{D,1}$ und $t \sim u$. Nach Satz 4.19 ist dann $\tilde{s}_{D,c,t} \sim \tilde{s}_{D,1,t}$ und $\tilde{s}_{D,1,t} \sim \tilde{s}_{D,1,u}$. Da $\mathrm{id} \circ \operatorname{res}^D_{P_0} = t_1 \equiv u \pmod{\mathfrak{p}}$ und $\tilde{s}_{D,1} \equiv \tilde{s}_{1,1} \pmod{\mathfrak{p}}$ ist, gilt auch $\tilde{s}_{D,1,u} \sim \tilde{s}_{1,1,\mathrm{id}}$. Also ist $\tilde{s}_{D,c,t} \sim \tilde{s}_{1,1,\mathrm{id}}$. Da D, c, t beliebig gewählt wurden, wurde gezeigt, daß $\operatorname{Sp}(A_{\mathcal{O}_F}(kG))$ nur eine Zusammenhangsklasse besitzt. □

Aus Korollar 4.21 folgt

Korollar 4.22. *Der Ring $a(kG)$ besitzt außer 0 und 1 keine Idempotente.*

Nun wird eine Operation der Galoisgruppe $G(F/\mathbb{Q})$ auf der Menge der Spezies von $A_{\mathcal{O}_F}(kG)$ definiert. Dazu seien $(D, c, t) \in X$. Ferner sei $\operatorname{Irr}\langle c\rangle = \langle \chi \rangle$. Da $\chi(c)$ und $\beta(c)$ Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}(\xi)$ sind, ist $\chi(c) = \xi^n$ und $\beta(c) = \xi^m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$. Es sei $\sigma \in G(F/\mathbb{Q})$. Dann ist $\sigma(\xi) = \xi^a$ für ein $a \in \mathbb{N}$. Also ist $\sigma(\chi(c)) = \chi(c)^a = \chi(c^a)$ und $\sigma(\beta(c)) = \beta(c)^a = \pm\beta(c^a)$. Nach Satz 3.31 ist

$$u_{D,c,t}(Z_{\varphi,j}) = \chi(c)^i\, \beta(c)^{j-1}\, t(T_j)$$

mit $1 \leq i \leq \operatorname{ord}(c)$. Somit ist

$$\sigma\big(u_{D,c,t}(Z_{\varphi,j})\big) = \sigma(\chi(c))^i\, \sigma(\beta(c))^{j-1}\, \sigma(T_j) = \chi(c^a)^i\, (\pm\beta(c^a))^{j-1}\, \sigma(T_j)\,.$$

Durch $\sigma(c) := c^a$ ist eine Operation von $G(F/\mathbb{Q})$ auf $N_G(D)_{p'}$ definiert. Die Spezies $t' \in \operatorname{Sp}(A(kD))$, für die

$$(\pm 1)^{j-1}({}^{\sigma}t) = t'$$

gilt (siehe Seite 74), wird mit $\sigma \star t$ bezeichnet. Auf diese Weise wird eine weitere Operation von $G(F/\mathbb{Q})$ auf $\operatorname{Sp}(A(kG))$ definiert. Mit den neu eingeführten Bezeichnungen ist

$${}^{\sigma}u_{D,c,t} = u_{D,\sigma(c),\sigma\star t}\,.$$

Desweiteren ist

$${}^{\sigma}\tilde{s}_{D,c,t} = \big({}^{\sigma}u_{D,c,t}\big) \circ \operatorname{res}^G_{\langle D,c\rangle} = u_{D,\sigma(c),\sigma\star t} \circ \operatorname{res}^G_{\langle D,c\rangle} = \tilde{s}_{D,\sigma(c),\sigma\star t}\,.$$

Nach Lemma 4.1 ist dann

$$\sigma(\mathcal{P}(\mathfrak{p}, \tilde{s}_{(D,c,t)})) = \mathcal{P}(\sigma(\mathfrak{p}), \tilde{s}_{(D,\sigma(c),\sigma\star t)})\,.$$

Aus Bemerkung 1.29 folgt

Satz 4.23. *Es gelten die Bezeichnungen von Satz 3.35.*

(i) Die Primideale von $a(kG)$ sind

$$\mathcal{I}(\mathfrak{p}, \tilde{s}_{(D,c,t)}) = \mathcal{P}(\mathfrak{p}, \tilde{s}_{(D,c,t)}) \cap a(kG) = \{x \in a(kG) \mid \tilde{s}_{D,c,t}(x) \in \mathfrak{p}\}$$

mit $\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_F$, $D \leq P$, $c \in N_G(D)_{p'}$ und $t \in \mathrm{Sp}(A(kP))$.

(ii) Für $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A_{\mathcal{O}_F}(kG))$ und $(D,c,t), (D',c',t') \in X$ gilt

$$\mathcal{I}(\mathfrak{p}, \tilde{s}_{(D,c,t)}) = \mathcal{I}(\mathfrak{q}, \tilde{s}_{(D',c',t')})$$

genau dann, wenn es ein $\sigma \in G(F/\mathbb{Q})$ mit

$$\mathfrak{q} = \sigma(\mathfrak{p}) \quad \textit{und} \quad \tilde{s}_{D',c',t'} \equiv \tilde{s}_{D,\sigma(c),\sigma\star t} \pmod{\mathfrak{q}}$$

gibt.

Literaturverzeichnis

[Alp] J. L. Alperin, *Local Representation Theory*, Cambridge University Press, 1986

[BC] D. J. Benson and J. F. Carlson, *Nilpotent elements in the Green ring*, Journal of Algebra **104** (1986), 329-350

[BP] D. J. Benson and R. A. Parker, *The Green ring of a finite group*, Journal of Algebra **87** (1984), 290-331

[Ben] D. J. Benson, *Representations and Cohomology I*, Cambridge University Press, 1991

[Bol] R. Boltje, *Representation rings of finite groups, their species, and idempotent formulae*, to appear in Journal of Algebra

[CR62] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, John Wiley & Sons, 1962

[CR] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory*, Wiley-Interscience, 1981

[Dei] M. Deiml, *Zur Darstellungstheorie von Darstellungsringen*, Dissertation, Jena 1997

[DK] A. Dress and D. Kletzing, *On prime ideals in representation rings*, Math. Z. **133** (1973), 285-300

[Fei] W. Feit, *The Representation Theory of Finite Groups*, North-Holland Publishing Company, 1980

[Gr62] J. A. Green, *The modular representation algebra of a finite group*, Illinois J. Math. **6** (1962), 607–619

[Gr64] J. A. Green, *A transfer theorem for modular representations*, Journal of Algebra **1** (1964), 73-84

[Hig] D. G. Higman, *Indecomposable representations at characteristic p*, Duke Math J. **21** (1954), 377–381

[HK] I. Hughes and G. Kemper, *Symmetric powers of modular representations for groups with a Sylow subgroup of prime order*, Jornal of Algebra **241** (2001), 759–788

[Jac] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, Freeman and Company, 1989

[Kun] E. Kunz, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Vieweg, 1997

[Kl] D. Kletzing, *Local splittings and multiplicities of closed algebras*, Comm. Algebra **7** (1979), 941–954

[Lin] J. H. Lindsey II, *Groups with a t.i. cyclic Sylow subgroup*, Journal of Algebra **30** (1975), 181-235

[Mar] D. A. Marcus, *Number Fields*, Springer, 1977

[Neu] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, 1992

[NT] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups*, Academic Press, 1988

[Pie] R. S. Pierce, *Associative Algebras*, Springer, 1982

[Rei] M. F. O'Reilly, *On the semisimplicity of the modular representation algebra of a finite group*, Illinois J. Math **9** (1965), 261–276

[Ren] J.-C. Renaud, *The decomposition of products in the modular representation ring of a cyclic group of prime power order*, Journal of Algebra **58** (1979), 1-11

[Rob] D. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer, 1982

[Sr] B. Srinivasan, *The modular representation ring of a cyclic p-group*, Proc. London Math. Soc (3) **14** (1964), 677-688

[Web] P. J. Webb, *On the orthogonality coefficients for character tables of the Green ring of a finite group*, Journal of Algebra **89** (1984), 247-263

[Zem] J. R. Zemanek, *Nilpotent elements in representation rings*, Journal of Algebra **19** (1971), 453-469